INLEIDING MATHEMATISCHE LOGICA

a 127 A en C

Het college wordt gegeven door prof.dr. S.C. van Westrhenen
en het dictaat is samengesteld door drs. Ph.H. Krijgsman.

Delft, november 1984

INHOUDSOPGAVE

TENTAMENEISEN

Het tentamen Inleiding Mathematische Logica a 127 C voor 1ste-jaars informaticastudenten wordt drie keer per jaar schriftelijk afgenomen. De vereisten voor dit tentamen zijn:

a kennis van de leerstof zoals beschreven
- in dit dictaat;
- op de pp 1 - 36 en 68 - 81 van het boek Swart + Hubbeling (2).

b vaardigheid in het oplossen van vraagstukken; oefenstof in dit dictaat en in de boeken Swart + Hubbeling (2) en Leblanc + Wisdom (1).

(1) Leblanc H. + Wisdom W.A. - Deductive Logic. Allyn and Bacon, Boston, London, Sydney, Toronto. (2nd. edition).

(2) Swart H.C.M. de + Hubbeling H.G. - Inleiding in de Symbolische Logica.Van Gorkum, Assen, Amsterdam 1976.

Delft, october 1983.

1. INLEIDING

Logica, leer der gevolgtrekkingen, geeft ons de middelen om geldige redeneringen te houden. In de volgende alinea's wordt omschreven wat daarmee wordt bedoeld; men zal zien dat het vrijwel onmogelijk is om alle daar genoemde begrippen te definiëren. Alleen daarom al zullen wij ons beperken tot de redeneringen die in de wiskunde voorkomen. Wanneer achteraf mocht blijken dat veel redeneerregels ook buiten de wiskunde gebruikt kunnen worden, dan is dat meegenomen.

Een redenering ziet er zo uit. Men heeft een of meer "gestelde" beweringen (premissen); dan volgt het woordje "dus" (of iets wat daaraan gelijk wordt geacht; zie straks); tenslotte komt een nieuwe bewering (conclusie). Bij een geldige redenering "volgt" de conclusie uit de premissen. (Dat is mooi, maar zegt nog niet zoveel.) Toegevoegd wordt dan: wanneer de premissen verondersteld worden waar te zijn, moet de conclusie ook als waar worden aanvaard. Weer anders (anders ?): het mag niet voorkomen dat de premissen waar zijn en de conclusie onwaar. (Gebeurt dat wel, dan heet de redenering ongeldig, ondeugdelijk, fout.)

Een bewering is een zin, niet een vraag, niet een bevel, maar wel een zin waarvan men kan zeggen: ja hij is waar, nee hij is onwaar. Er zit in elk geval een persoonsvorm van een werkwoord in.

Vooraf nog duidelijk opmerken: het is niet de taak van de logica (van het onderdeel formele logica, als men wil) om de waarheid van beweringen te onderzoeken. Wel om geldigheid van redeneringen na te gaan, misschien nog beter: om geldige redeneringen vast te stellen.

Enige andere graag gebruikte termen (de op één regel genoemde zijn niet allemaal volkomen gelijkwaardig):

- bewering (uitspraak, mededeling, bevestigende zin,...)
- redenering (sluitrede, gevolgtrekking ('), bewijsvoering, argumentatie, inferentie,...)
- geldig (deugdelijk, juist, goed, gezond, correct, valide,...)
- premisse (gestelde, aanname, onderstelling, hypothese, suppositie, assumptie,...)
- conclusie (slotsom, gevolg, gevolgtrekking ('),...)
- dus (derhalve, hieruit volgt (logisch(erwijs)), (dit (alles)) sleept met zich mee/ heeft tot consequentie/impliceert,...)

Om de gedachten ergens bij te houden beschouwen we de volgende voorbeelden. Het is duidelijk dat u de als fout aangegeven redeneringen zelf had kunnen aanwijzen en dat u bij de geldige redeneringen de conclusie zelf had kunnen opstellen.

I. Elk mens is sterfelijk. Napoleon is een mens. Dus: Napoleon is sterfelijk.
II. Alle mensen zijn dieren. Socrates ziet een mens. Dus: Socrates ziet een dier.
III. Alle mensen zijn slim. Mensapen zijn mensen. Dus: Mensapen zijn slim.
IV. Leraren zijn oud. Alle bejaarden zijn leraar. Dus: Alle bejaarden zijn oud.
V. Sommige leraren zijn oud. Sommige generaals zijn leraar. Dus(fout): Sommige generaals zijn oud.
VI. Sommige leraren zijn Engels. Sommige Zwitsers zijn leraar. Dus(fout): Sommige Engelsen zijn Zwitsers.
VII. Paarden zijn dieren. Dus: Paardestaarten zijn dierestaarten.
VIII. Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de overstaande hoeken gelijk. Dus: Als in een driehoek twee hoeken niet gelijk zijn, dan zijn de overstaande zijden niet gelijk.

(Elk van de volgende voorbeelden speelt zich af op een bepaald tijdstip op een bepaalde plaats en gaat over een bepaalde persoon.)

IX. Jan slaapt. Als Jan slaapt dan hoort hij de wekker niet. Dus: Jan hoort de wekker niet.
X. Jan slaapt of hij zit op zolder. Jan slaapt niet. Dus: Jan zit op zolder.
XI. (Dezelfde premissen als in X.) Dus(fout): Jan snurkt.
XII. Jan eet ijs. Er komt een auto voorbij. Dus(fout): Jan eet ijs omdat er een auto voorbij komt.

(') Woorden op -ing zijn soms vervelend dubbelzinnig.

Bij III merken we op dat premissen en conclusie onwaar zijn; bij IV zijn de premissen onwaar en is de conclusie waar. Maar dat doet niets af aan de geldigheid van de redenering; de conclusie is op correcte wijze getrokken.

Bij XI zult u zeggen: nee, het kan best waar zijn dat Jan snurkt, maar het volgt niet. Wel wanneer we bijv. deze premissen toevoegen: Als Jan slaapt dan snurkt hij; als Jan op zolder is dan snurkt hij.

Men ziet dat elke twee beweringen voorkomend in premissen en conclusie zeker één onderdeel gemeenschappelijk hebben. Bij zinsontleding komt dat te voorschijn. Om te beginnen kijken we of een zin door middel van voegwoorden is samengesteld uit andere zinnen (de propositielogica ofwel junctorenlogica, hoofdstuk 1, gaat niet verder). Daarna ontleden we in onderwerp en gezegde (de predicatenlogica ofwel quantorenlogica, hoofdstuk 2). In beide gevallen begeven we ons overigens buiten het boekje der taalregels: we beschouwen als voegwoord ook andere woorden dan de taalkundig als zodanig erkende, en we rekenen tot de subjecten van een predicaat niet alleen het onderwerp maar ook een of meer voorwerpen.

Nu moeten we laten zien dat we het in de wiskunde gemakkelijker hebben dan ergens anders; hiertoe volgen we heel vlug en oppervlakkig één enkel draadje in de geschiedenis der wiskunde.

In een wiskundige theorie wordt uitgegaan van grondstellingen (axioma's), waarin grondbegrippen voorkomen die niet of moeilijk te definiëren zijn; uit deze axioma's worden met behulp van de regels of wetten der logica andere beweringen, stellingen, afgeleid. Zo althans werd het vroeger op school geleerd, en zo is het grotendeels nog. Die regels kreeg men overigens zelden te zien; ze werden in het algemeen onbewust en goed toegepast. (Onze eerste taak zal straks zijn om deze regels op te stellen.)

De meetkunde werd al lang voor onze jaartelling geaxiomatiseerd; in dezelfde tijd begon men de logische wetten te onderzoeken en op te stellen. Eén streven daarbij was om uit te gaan van zo weinig mogelijk beweringen, maar toch genoeg om elk in de bewijspractijk gebruikt begrip te kunnen hanteren. Bij nader kritisch bekijken (in de 19e eeuw) bleek daar nog veel aan te mankeren; zo werd ongeveer alles wat met ordening samenhing "uit een plaatje" gehaald. Eerst tegen 1900 werd (door Hilbert) een volledig axiomastelsel opgesteld. Hierin werd nog van de "omgangstaal" gebruik gemaakt: woorden als punt, lijn, liggen op enz. kwamen in de axioma's voor. Later werd alles "geformaliseerd", in formule gebracht: letters en tekens werden als afkorting voor die begrippen en voor de "logische bewerkingen" gebruikt. O.a. om te vermijden dat door het gebruik van "gewone" woorden weer ongewenste associaties zouden ontstaan en verzwegen premissen konden insluipen.

Iets dergelijks gebeurde in de theorie der reële getallen. Natuurlijk was met die getallen eeuwenlang lustig gerekend, zonder dat men precies uitgesproken had aan welke regels en eisen zij moesten voldoen - laat staan dat men gezegd had wat een reëel getal was. In de kritische tijd werd bijv. ontdekt dat eigenlijk nog nooit "goed" bewezen was dat $\sqrt{2}$ maal $\sqrt{3}$ gelijk is aan $\sqrt{6}$; er moest nodig iets aan de theorie gedaan worden. Eerst (tegen 1870) werden de reële getallen met behulp van ingewikkelde constructies uit de rationale getallen (de gewone breuken) gemaakt. Daarna werden hun "wezenlijke" eigenschappen vastgelegd in een axiomastelsel (wederom door Hilbert en gelijktijdig met het meetkundestelsel), en dit kent men in de huidige tijd als minst langzame manier van invoeren van het reële getal.

Een klein onderdeel, de theorie der positieve gehele getallen, was al tegen 1890 geaxiomatiseerd (door Dedekind); het volgend jaar heeft Peano dat in een geformaliseerde taal gebracht (en het betreffende artikel overigens ook nog in een kunsttaal, esperanto-achtig, geschreven.)

U kunt nu wel raden waar het in eerste aanleg heen gaat: de wiskunde maakt haar zinnen zelf (dat worden formules, dus zekere tekenristen) - in de twee volgende hoofdstukken wel voldoende omschreven (preciese definitie in Aanhangsel B.). De wiskunde bemoeit zich (zeker na 1900) niet met "waarheid" van haar axioma's (het grapje van Russell is niet helemaal een grapje: "De wiskunde is de wetenschap waarin we niet weten waar we over spreken noch of onze uitspraken waar zijn."). In de logische wetten, redeneerregels, worden (in eerste aanleg wederom) syntactische regels, dus regels voor productie van tekenristen uit tekenristen. Op naar hoofdstukken 1 en 2 waarin we de schriftelijke timmercursus krijgen. Antwoorden in Aanhangsel A.

2. PROPOSITIELOGICA

In dit hoofdstuk beschouwen we beweringen die we niet verder wensen of hoeven te ontleden. Zij worden gebruikt om er samengestelde zinnen van te maken, en dat gebeurt door ze aan elkaar te koppelen met behulp van voegwoorden of wat we in de wiskunde daarvoor laten doorgaan (en, of, als, als-dan-, dan en slechts dan); bovendien wordt het bijwoord "niet" toegelaten, het wordt "toegepast" op één zin. Aangezien we deze woorden toch door tekens vervangen, zullen we niet meer van voegwoorden spreken, maar van connectieven, junctoren.

In wiskundige beweringen staat de persoonsvorm van het werkwoord in de aantonende wijs (indicatief) (en overigens ook in de tegenwoordige tijd); dit is vooral van belang voor de met "als" samengestelde zinnen.

De betekenis van de junctoren moet blijken uit het gebruik dat ervan gemaakt wordt, dat wil zeggen uit de ten grondslag liggende redeneerregels waarin zij voorkomen; wij moeten het eerst eens worden omtrent de aanvaarding daarvan. Daarbij kan de (oorspronkelijke) taalkundige betekenis een richtlijn geven en als benadering van vertaling of uitspraak dienen.

Met nadruk wordt gezegd dat het opschrijven of uitspreken van een met onze junctoren samengestelde zin hier op geen enkele manier een verband legt tussen de samenstellende zinnen of daarvan ook maar iets zegt. Dat laatste gebeurt bijv. in: zin A is waar, zin A is onwaar, als zin A waar is dan is zin B waar, uit zin A volgt zin B, zin A impliceert zin B, de zinnen A en B zijn equivalent. Daar worden de samenstellende zinnen genoemd en er wordt iets van beweerd. Men kan dat altijd herkennen aan een extra (meestal derde) persoonsvorm; de twee andere zitten in A en B.

Ook al is dit klein uitstapje in het abstracte (het probleem van "use and mention") wat moeilijk, toch zal het duidelijk zijn dat men de junctoren niet op dezelfde wijze behandelt en dus inconsequent te werk gaat, wanneer men bij de ene niet en bij de andere wel een derde persoonsvorm toevoegt. Wat denkt u zelf van iemand die de eerste drie rekenkundige bewerkingen a+b, a b, a-b als volgt uitspreekt: a plus b, a maal b, a is gelijk aan b (en die het laatste wil rechtvaardigen door te zeggen: nu dat is toch zo, wanneer a min b gelijk is aan nul)?

Kan men op dit niveau werkelijk niet zonder werkwoordvormen, gebruik dan het voltooid deelwoord.

Verwarring op dit gebied is begrijpelijk. Want de meeste stellingen in een wiskundige theorie zijn van het type $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$.(1) Deze stellingen zijn "waar" (als men wil), in elk geval afgeleid uit de axioma's van de theorie. En dat wordt bij het beschrijven van de theorie aangegeven door voorplaatsing van het woord "stelling" (theorema, propositie, lemma,...) of van een bijzonder teken (zie Aanhangsel B). Men had ook kunnen schrijven of denken: "$A \rightarrow B$" is waar; met een derde persoonsvorm. Maar dan kan men ook terecht gebruik maken van andere persoonsvormen, bijv.: Uit A volgt B, A is voldoende (voorwaarde) voor B, B is noodzakelijk(e voorwaarde) voor A (dit laatste is wellicht ontstaan uit: $\neg B \rightarrow \neg A$; zie voetnoot 6 blz. 4).

Maar we zullen niet meegaan met de gewoonte om te zeggen: A impliceert B. Dat betekent in de logica nu eenmaal iets anders: A heeft tot logisch gevolg B, d.w.z. A en B passen in een correct redeneerschema. Bijv.: "$\neg A \wedge (A \vee B)$" impliceert "B" (uit de regel: $\neg A \blacktriangle (A \vee B)$ dus B).

Het hierna beschreven stelsel van "natuurlijke deductie (afleiding)" geeft ook toegang tot de "logica der constructivisten (intuitionisten)". Zij erkennen de regel "$\neg\neg A$ dus A" niet; dat zou namelijk tot een voor hun onaanvaardbare redenering leiden: "Niet alle dingen hebben eigenschap P; dus: er is 'n ding dat eigenschap P niet heeft." (zie blz. 16). In onze tekst staat overal waar van deze regel gebruik gemaakt moet worden, het woord "klassiek".

(1) Voor de tekens zie blz. 4.

In dit hoofdstuk zullen we beweringen afkorten door hoofdletters A,B,... en de connectieven door tekens; een op deze wijze geschreven zin heet een formule; een redeneerregel met formules geschreven heet een redeneerschema (-figuur, -type, -patroon, -vorm).

Bij infixnotatie (het bewerkingsteken (operator) staat tussen de bewerkten (operandenl) behoren automatisch volgens gewoon wiskundig gebruik haakjes gezet te worden. Bij prefixnotatie (het bewerkingsteken staat vóór de bewerkte(n)) hoeft dat niet, mag wel (wij doen dat niet). We zullen alleen het teken voor "niet" prefix schrijven. Haakjesbesparende regels zullen niet voorkomen behalve de heel gebruikelijke: buitenhaakjes weglaten.

Nu volgen de voor onze samenstellingen meest gebruikte namen en tekens en uitspraak daarvan (in gelijkgenummerde voetnoten vindt men andere benevens nadere gegevens).

(1) de negatie van A; $\neg A$; niet-A.

(2) de conjunctie van A en B; $(A \wedge B)$; A en B. (A,B heten de termen ervan.)

(3) de adjunctie van A en B ; $(A \vee B)$; A of B. (A,B heten de termen ervan.)

(4) de subjunctie van A en B; $(A \rightarrow B)$; als A dan B. (A heet het antecedent en B het consequent ervan.)

(5) de bisubjunctie van A en B; $(A \leftrightarrow B)$; A dan en slechts dan als B. (A,B heten de termen ervan.)

(Heeft men geen zin in buitenlands, zeg dan: niet-zin, en-zin, of-zin, als-dan-zin, dsd-zin.)

Op blz. 6 vindt men een aantal redeneerschema's, sommige voorzien van de middeleeuwse namen of van de (meestal ook middeleeuwse) gebruikers.

De premisse(n) staan boven de streep, in willekeurige volgorde (ze kunnen onder elkaar geschreven worden, maar ook naast elkaar, gescheiden door komma's of grote spaties). De streep staat voor "dus" (of synoniemen, zie blz.1); wordt het gehele schema op één regel geschreven, dan maken we er $.^{\cdot}.$ van (moderner tekens in Aanhangsel B). De conclusie staat onder de streep.

Gevraagd wordt vooreerst: wat denkt u van deze redeneerregels? Zet vooral vraagtekens waar u iets twijfelachtigs tegenkomt!

(1) Uitspraak ook: non-A. Andere tekens: $\sim A$ (met kromme N).

(2) Uitspraak ook: zowel A als B, A en tevens B. Andere tekens: (A&B), (A.B), (AB).

(3) $\vee$ komt van het latijnse woord "vel". Andere uitspraken: A of B of beide, A of/en B (juridisch), eng. A and/or B. Oud teken: (A+B). De naam adjunctie is van Behmann. De helaas veel gebruikte namen disjunctie, alternatief, horen oorspronkelijk thuis bij een ander "of" (lat. aut) waarvoor andere regels gelden (zie blz.6); vergelijk de uitdrukking "disjuncte verzamelingen". Voor de wiskunde is "aut" niet practisch.

(4) Eng. naam: conditional. De naam subjunctie is van Lorenzen. Wij zullen het niet "implicatie" noemen (zie blz.3). Andere wijzen van uitspraak: B (dan) als A (B if A), A slechts dan als B, A alleen als B (A only if B). Deze althans in het wiskundig gebruik; vergelijk bisubjunctie. (Voor omgangstaal zie nog voetnoot 6.) Andere tekens: $(A \supset B)$, $(A \vdash B)$. Men noemt nog $B \rightarrow A$ de omkering van $A \rightarrow B$ en $\neg B \rightarrow \neg A$ de gecontraponeerde van $A \rightarrow B$.

(5) Eng. biconditional. De enige junctor die door iedereen onmiddellijk op de vorige wordt teruggebracht: afkoring van $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$. Uitspraak: als A dan B en omgekeerd; A if and only if B; A iff B (Halmos); A genau dann wenn B. Ander teken: $(A \equiv B)$.

(6) Een voorbeeld uit de omgangstaal: Ik geef toestemming (T) (,maar) alleen als je een goed rapport meebrengt (R). Dat schijnt te betekenen: als niet-R dan niet-T en tegelijk als R dan T. Nu is $\neg R \rightarrow \neg T$ een gevolg van $T \rightarrow R$, en leidt (klassiek) tot $T \rightarrow R$ (zullen we zien), zodat het geheel wordt: $R \leftrightarrow T$.

Redeneerregels

modus (ponendo) ponens $\frac{A,\ A \to B}{B}$ | $\frac{A}{B \to A}$ | commutatie $\frac{A \to (B \to C)}{B \to (A \to C)}$

hypothetisch syllogisme $\frac{A \to B,\ B \to C}{A \to C}$

modus tollendo tollens $\frac{A \to B,\ \neg B}{\neg A}$; nevenvorm $\frac{A \to \neg B,\ B}{\neg A}$

contrapositie $\frac{A \to B}{\neg B \to \neg A}$, $\frac{A \to \neg B}{B \to \neg A}$; klassiek ook nog $\frac{\neg A \to B}{\neg B \to A}$, $\frac{\neg A \to \neg B}{B \to A}$

reductio ad absurdum $\frac{A \to B,\ A \to \neg B}{\neg A}$; klassiek ook nog $\frac{A \to B,\ \neg A \to B}{B}$

Duns Scotus $\frac{\neg A}{A \to B}$, $\frac{A}{\neg A \to B}$ | $\frac{\neg(A \to B)}{\neg B}$; klassiek ook nog $\frac{\neg(A \to B)}{A}$

ex falso sequitur quodlibet $\frac{A,\ \neg A}{B}$ | $\frac{A}{\neg\neg A}$; klassiek ook $\frac{\neg\neg A}{A}$

in contrarium $\frac{A \to \neg A}{\neg A}$; klassiek ook nog $\frac{\neg A \to A}{A}$ Clavius

Peirce's implication $\frac{(A \to B) \to A}{A}$ (klassiek!)

$\frac{A,\ B}{A \wedge B}$ | $\frac{A \wedge B}{A}$, $\frac{A \wedge B}{B}$ | $\frac{A \to B,\ A \to C}{A \to (B \wedge C)}$

import $\frac{A \to (B \to C)}{(A \wedge B) \to C}$ export $\frac{(A \wedge B) \to C}{A \to (B \to C)}$

gedeeltelijke contrapositie $\frac{(A \wedge B) \to C}{(A \wedge \neg C) \to \neg B}$, $\frac{(A \wedge B) \to \neg C}{(A \wedge C) \to \neg B}$;

klassiek ook nog $\frac{(A \wedge \neg B) \to C}{(A \wedge \neg C) \to B}$, $\frac{(A \wedge \neg B) \to \neg C}{(A \wedge C) \to B}$

modus ponendo tollens $\frac{A,\ \neg(A \wedge B)}{\neg B}$; klassiek ook nog (nevenvorm) $\frac{A,\ \neg(A \wedge \neg B)}{B}$

$\frac{\neg(A \wedge B)}{A \to \neg B}$ $\frac{A \to \neg B}{\neg(A \wedge B)}$ | $\frac{A \to B}{\neg(A \wedge \neg B)}$; klassiek ook nog $\frac{\neg(A \wedge \neg B)}{A \to B}$

$\frac{A \wedge B}{\neg(A \to \neg B)}$, $\frac{A \wedge \neg B}{\neg(A \to B)}$; klassiek ook omgekeerd $\frac{\neg(A \to \neg B)}{A \wedge B}$, $\frac{\neg(A \to B)}{A \wedge \neg B}$

$\frac{A}{A \vee B}$, $\frac{B}{A \vee B}$ | $\frac{A \to C,\ B \to C}{(A \vee B) \to C}$ | constructief dilemma $\frac{A \vee B,\ A \to C,\ B \to C}{C}$

uitgebreid constructief dilemma $\frac{A \vee B,\ A \to C,\ B \to D}{C \vee D}$

destructief dilemma $\frac{A \to (B \vee C),\ \neg B,\ \neg C}{\neg A}$; $\frac{A \to B,\ C \to D,\ \neg B \vee \neg D}{\neg A \vee \neg C}$

modus tollendo ponens $\frac{\neg A,\ A \vee B}{B}$; nevenvorm $\frac{A,\ \neg A \vee B}{B}$

1 $\frac{A \vee B}{\neg A \to B}$, $\frac{\neg A \vee B}{A \to B}$; klassiek ook omgekeerd $\frac{\neg A \to B}{A \vee B}$, $\frac{A \to B}{\neg A \vee B}$

2. Ockham ("de Morgan") $\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$ en omgekeerd $\frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B)}$ (verder nog $\frac{A \wedge B}{\neg(\neg A \wedge \neg B)}$)

3. Ockham ("de Morgan") $\frac{\neg A \vee \neg B}{\neg(A \wedge B)}$ (en verder $\frac{A \vee B}{\neg(\neg A \wedge \neg B)}$); klassiek ook omgekeerd $\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$

4. $\frac{A \to (\neg B \vee C)}{(A \wedge B) \to C}$, $\frac{A \to (B \vee C)}{(A \wedge \neg B) \to C}$; klassiek ook omgekeerd $\frac{(A \wedge B) \to C}{A \to (\neg B \vee C)}$, $\frac{(A \wedge \neg B) \to C}{A \to (B \vee C)}$

5. Peirce's Schnitt $\frac{A \to (B \vee C),\ (A \wedge B) \to C}{A \to C}$ | $\frac{A \to C,\ A \to D,\ B \to C,\ B \to D}{(A \vee B) \to (C \wedge D)}$

6. Russell $\frac{A \vee B}{(A \to B) \to B}$; klassiek ook omgekeerd $\frac{(A \to B) \to B}{A \vee B}$

Hauber $\frac{A \to C,\ B \to D,\ A \vee B,\ \neg(C \wedge D)}{(C \to A) \wedge (D \to B)}$

Al deze redeneerregels, waarvan sommige eigenaardig aandoen of op het eerste gezicht zelfs betwijfeld worden, kunnen worden afgeleid uit tien grondregels die in de wiskunde algemeen aangenomen worden. Per voegteken hebben we een (of twee) regel(s) die het teken invoeren, d.w.z. het staat niet in de premissen, maar wel in de conclusie, en een (of twee) die het teken wegwerken. Voor $\wedge$ gebruikt men de eerste drie op regel 10; voor $\vee$ de eerste twee op regel 17 (ze blijven vreemd) en de laatste op die regel; voor $\neg$ de reductio ad absurdum op regel 5 en de laatste op regel 7 (de constructivisten gebruiken in plaats daarvan 'A, $\neg$A dus B' op regel 7; op blz.A2 ad 7 vindt men dat deze regel ook ter beschikking van de anderen is); voor $\rightarrow$ de modus ponens op regel 1, en ter invoering een nieuwe regel die van school bekend is, vooral uit de meetkundeles. Toen daar een of andere stelling in de gedaante "als A dan B" moest worden bewezen, was de gang van zaken kortweg zo: Stel A, leid nu af B; dan is (onafhankelijk van het gestelde A) aangetoond: als A, dan B.

Deze regels werden in de practijk altijd toegepast, ook al had de logica, zeker in de jaren 1870-1930, een meer axiomatisch tintje (waarover nader in Aanhangsel C). In 1934 werden ze wat meer in het middelpunt van de belangstelling gebracht door Jaśkowski en vooral Gentzen; de "natuurlijke deductie" ging in de logica (weer) haar intrede doen.

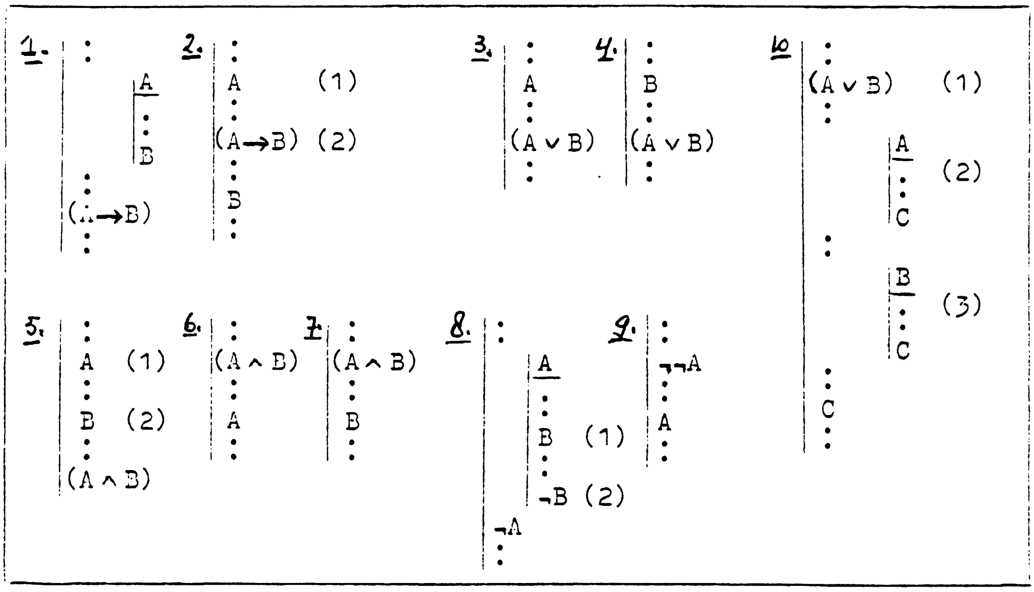
We zullen de regels en de afleidingen opschrijven op de manier door Fitch in 1952 aangegeven; zoals altijd is het eenvoudiger om het spel te spelen dan de spelregels precies op te schrijven. Hij zet elke nieuwe formule op een nieuwe regel, het geheel achter een verticale streep; de aannamen (premissen), in willekeurige volgorde opgeschreven, worden van de rest afgescheiden door een horizontale streep. Dan komen, ook in willekeurige volgorde, maar een voor een, de gevolgen (conclusies) die uit de aannamen en de reeds opgeschreven formules met behulp van de grondregels te trekken zijn. Doet zich de behoefte van een nieuwe aanname (stel..) voor - dat gebeurt zeker bij invoering van $\rightarrow$ en dus ook overal waar in de andere grondregels in de premissen een $\rightarrow$ voorkomt - dan wordt deze in een nieuwe kolom rechts gezet, en deze kolom wordt ook van de nodige strepen voorzien. Met dien verstande dat bij toepassing van het dilemma twee kolommen onder elkaar komen te staan. De oorspronkelijke aannamen blijven deze "ondergeschikte" kolommen beheersen; zij en de tot dusver in de hoofdkolom opgeschreven formules mogen in de nevenkolommen gebruikt worden. Is in de nevenkolom bereikt wat men wil, dan springt men in de hoofdkolom terug met de toegestane conclusie; de nieuwe aanname heeft zijn dienst gedaan en wordt buiten werking gesteld.

Practische wenken bij het opstellen van een afleiding (die door iemand voorgesteld wordt; de conclusie is bekend): begin bovenaan en onderaan. Is de conclusie van type $P \rightarrow Q$ of $\neg P$, stel dan P en probeer Q resp. een tegenspraak te bereiken. Is de conclusie van een ander type (vooral $P \vee Q$), dan moet men meestal $\neg(P \vee Q)$ stellen en een tegenspraak zien te bereiken; in de hoofdkolom komt dan $\neg\neg(P \vee Q)$ en dan $P \vee Q$. (Op blz.3 is ter waarschuwing het woordje "klassiek" toegevoegd). Men mag bij de afleidingen ter versnelling gebruik maken van reeds afgeleide redeneerregels (immers de afleiding van zo een nieuwe regel kan altijd op de betreffende plaats tussengeschoven worden).

Soms gelukt de afleiding niet; dit wil dan niet zeggen dat de conclusie onafleidbaar is. In hoofdstuk 2 wordt een methode beschreven om te vinden òf hij afleidbaar is; is dat het geval, dan moet de afleiding met de in hoofdstuk 1 beschreven regels te vinden zijn. In hoofdstuk 2 staat ook een betoog dat ons misschien kan overtuigen van de onmogelijkheid om uit onze regels een tegenspraak af te leiden.

Een onverwachte toepassing van de regel ter invoering van $\rightarrow$ is deze: hebben we uit een enkele premisse P de conclusie Q afgeleid, dan kunnen we zonder enige aanname $P \rightarrow Q$ afleiden. (Zet een nieuwe verticale streep voor de afleiding en schrijf in deze lege hoofdkolom $P \rightarrow Q$ na de nevenkolom!) Hetzelfde kan zich voordoen wanneer uit de enkele premisse P een tegenspraak volgt; men kan dan in een nieuw te maken hoofdkolom de conclusie $\neg P$ opschrijven. Men spreekt van een "zonder aannamen afgeleide formule", kortweg "these".

Tenslotte is het toegestaan om een stel premissen te spreiden over meerdere kolommen: zet de eerste premisse in de hoofdkolom, de tweede in een nevenkolom, enz.



Structuurregels:
a) De stukken (1),(2),(3) mogen in andere volgorde voorkomen.
b) Herhaling van een formule op een latere plek in dezelfde kolom of op een plaats na de aanname in een ondergeschikte kolom is toegestaan.

Oefeningen. Laat zien dat de redeneerregels op blz. 5 met behulp van de bovenstaande grondregels kunnen worden verkregen. (De afleidingen staan op blz. 20+21)

Leid de volgende formules (in totaal 42) af zonder aannamen.

1) $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$ en omgekeerd (d.w.z. $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$; dergelijk in het volgende).
2) $(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ en omgekeerd; evenzo voor $\vee$.
3) $((A \wedge B) \wedge C) \rightarrow (A \wedge (B \wedge C))$ en omgekeerd; evenzo voor $\vee$.
4) $A \rightarrow (A \wedge A)$ en omgekeerd; evenzo voor $\vee$.
5) $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (A \vee (B \wedge C))$ en omgekeerd.
6) $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \rightarrow (A \wedge (B \vee C))$ en omgekeerd.
7) $((A \wedge B) \vee A) \rightarrow A$ en omgekeerd.
8) $((A \vee B) \wedge A) \rightarrow A$ en omgekeerd.
9) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ en omgekeerd.
10) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B))$
11) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
12) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C)$
13) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
14) $((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$ en omgekeerd.
15) $(C \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow ((C \rightarrow A) \wedge (C \rightarrow B))$ en omgekeerd.
16) $((A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$; omgekeerd klassiek.
17) $((C \rightarrow A) \vee (C \rightarrow B)) \rightarrow (C \rightarrow (A \vee B))$; omgekeerd klassiek.
18) $\neg(A \wedge \neg A)$
19) $A \vee \neg A$
20) $A \vee (A \rightarrow B)$
21) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
22) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)$

(19–22: klassiek.)

5½) $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$

Andere voegtekens zijn: $\leftrightarrow$ (dan en slechts dan als) en $+$ (korter +; óf-óf-; latijn: aut). Regels:

$$\frac{A \rightarrow B\ ,\ B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}\ ;\quad \frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B}\ ,\quad \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

$$\frac{A,\ \neg B}{A + B}\ ,\quad \frac{\neg A,\ B}{A + B}\ ;\quad \frac{A,\ A+B}{\neg B}\ ,\quad \frac{\neg A,\ A+B}{B}$$

Leid af: $\neg(A+B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$ en omg.
$(A+B) \rightarrow ((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$ en omg.

(') Men mag gebruik maken van reeds afgeleide regels.

Laat zien ("bewijs") dat de constructivisten in plaats van hun regel $\frac{A,\ \neg A}{B}$ de modus tollendo ponens $\frac{\neg A\ ,\ A \vee B}{B}$ kunnen nemen.

Taaloefeningen

T1) If rain continues, then the river rises. If rain continues and the river rises, then the bridge will wash out. If continuation of rain will wash the bridge out, then a single road is not sufficient for the town. Either a single road is sufficient for the town or the traffic engineers have made a mistake. Therefore the traffic engineers have made a mistake.

T2) If 25 divisions are enough, then the general will win the battle. Either 3 wings of tactical air support will be provided, or the general will not win the battle. Also, it is not the case that 25 divisions are enough and that 3 wings of tactical air support will be provided. Therefore, 25 divisions are not enough.

T3) If there are no government subsidies of agriculture, then there are government controls of agriculture. If there are government controls of agriculture, there is not an agricultural depression. There is either an agricultural depression or overproduction. As a matter of fact, there is no overproduction. Therefore, there are government subsidies of agriculture.

T4) If Adams joins, then the club's social prestige will rise; and if Baker joins, then the club's financial position will be more secure. Either Adams or Baker will join. If the club's social prestige rises, then Baker will join; and if the club's financial position becomes more secure, then Wilson will join. Therefore either Baker or Wilson will join. (2 gedeelten van premissen zijn overbodig!)

T5) If the contract is valid, then Harry is liable. If he is liable he will go bankrupt. If the bank will loan him money, he will not go bankrupt. As a matter of fact, the contract is valid and the bank will loan him money. (The set of premises is inconsistent.)

T6) Stelling II: Een functie f gedefinieerd op D kan in P slechts dan een extreem hebben als 1) P geen inwendig punt is van D, of 2) P een inwendig punt is van D en f in P niet differentieerbaar is, of 3) P een stationair punt is van f.
Deze stelling volgt onmiddellijk uit (zeggen de schrijvers)
Stelling I: Als f in een inwendig punt P van D een extreem heeft en f is differentieerbaar in P, dan is P een stationair punt van f.

T7) Euklides geeft dit bewijs van de stelling "Zijn a en n positieve gehele getallen, dan is a deelbaar door elke priemfactor van a^n." Immers, was a niet deelbaar door de priemfactor p van a^n, dan zou, daar $a^n = a.a^{n-1}$, a^{n-1} deelbaar zijn door p. Evenzo zou dan a^{n-2}, $a^{n-3}, \ldots, a^2$, a deelbaar zijn door p. Samenvattend: was a niet deelbaar door p, dan zou a wel deelbaar zijn door p. Dus (zegt Euklides) moet a wel deelbaar zijn door p.

T8) Demokritos redeneerde: had Protagoras gelijk met de opvatting dat elke voorstelling waar is, dan zou ook de voorstelling "niet elke voorstelling is waar" waar moeten zijn. Dus is het niet waar dat elke voorstelling waar is.

T9) Een redenering van Pascal kan als volgt worden samengevat: Bestaat God, dan is er alles voor, zijn bestaan aan te nemen; bestaat God niet, dan is er niets op tegen, zijn bestaan aan te nemen. In elk geval doet men het verstandigst, zijn bestaan aan te nemen.

T10) There is a story about Protagoras, no doubt apocryphal, which illustrates the connection of the Sophists with the law-courts in the popular mind. It is said that he taught a young man (Euathlos) on the terms that he should be paid his fee if the young man won his first law-suit, but not otherwise, and that the young man's first law-suit was one brought by Protagoras for recovery of his fee.

De boommethode

Op blz.1 hebben we gezegd: "Uit taalzin 1 en taalzin 2 volgt logisch(erwijs) taalzin 3" moet zoiets betekenen als: de genoemde zinnen passen in een algemeen redeneerpatroon. Nu kunnen we het iets preciezer zeggen: we krijgen taalzin 1,2,3 uit opvolgend de formules P,Q,R door substituties voor de letters A,B,..in die formules voorkomend, en de redeneerregel (redeneervorm) "P,Q, dus R" is (in het totdusver gebruikte systeem natuurlijk) juist (correct, geldig). Men zegt ook graag: "taalzin 1 en taalzin 2 impliceren taalzin 3". Zo kunnen we zeggen:

"2+2=4" impliceert "als 2+2≠4 dan is de maan van kaas gemaakt" (regel "A dus $\neg A \rightarrow B$")

"2+2=4 en 2+2≠4" impliceren "de maan is van kaas gemaakt" (regel "A,¬A dus B),
maar niet: "2+2≠4" impliceert "de maan is van kaas gemaakt" (regel "A, dus B" is er niet).

\- Ook zal min of meer impliciet duidelijk zijn geworden - het geldt voor een eindig aantal premissen $P_1,..,P_n$ (minstens een), maar we spreken het uit voor twee -

Indien uit P en Q afleidbaar is R, dan is uit P,Q,¬R een tegenspraak (contradictie) afleidbaar (namelijk R en ¬R) (Men zegt dat P,Q,¬R strijdig (inconsistent) zijn.) Ook omgekeerd: is uit P,Q,¬R een tegenspraak afleidbaar, dan volgt R logisch uit (is afleidbaar uit) P en Q. (Overal is bedoeld: afleidbaar met behulp van het onderhavige systeem van logica.)

```
                P
                Q
                ‾‾
                  ¬R
                  ‾‾
                  1
                  2
hier de           .
gestelde  {       .
afleiding         S∧¬S
                ¬¬R
                R
```

Deze beweringen, waarvan wij waarschijnlijk graag zeggen dat ze waar zijn, zijn beweringen <u>over</u> (het hier gebruikte systeem van)de logica, zogenaamde <u>metastellingen</u>. Andere voorbeelden:

De formule $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ is zonder aannamen afleidbaar.

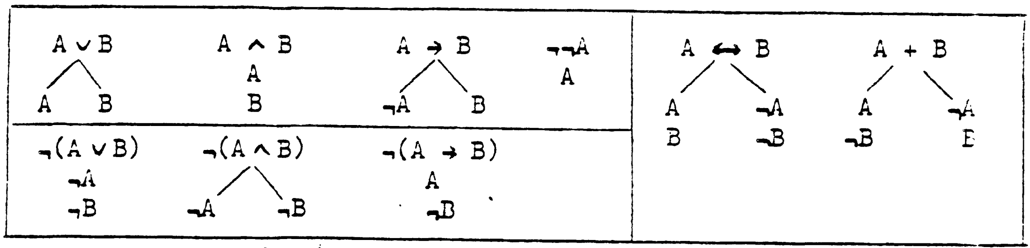
De redeneervorm "$\neg(A \rightarrow B)$ dus $A \wedge \neg B$" is juist.

De formules $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ en $(A \wedge B) \rightarrow C$ zijn equivalent (d.i. uit elkaar afleidbaar).

\- Totdusver hebben we in onze afleidingen van twee kanten kunnen werken, omdat de conclusie ons voorgeschoteld was. Maar dikwijls hebben we te maken met premissen P,Q,.. (opgebouwd met behulp van junctoren uit niet nader te ontleden elementen A,B,..) waarbij we een conclusie maar moeten vinden. Soms lukt dat door lukraak een van die elementaire formules (A,¬A..) te stellen en te zien wat er gebeurt. Vier voorbeelden met antwoord (afleidingen blz.A 5): $(A \vee C) \rightarrow (A \wedge C)$, $(\neg A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B$, $B \vee \neg(A \leftrightarrow C)$ geven A, B, C; $A \rightarrow (\neg B \vee C)$, $B \rightarrow (A \wedge \neg C)$, $\neg(C \rightarrow B)$ geven ¬B,C en het lukt niet om iets van A te weten te komen (d.w.z. A hetzij ¬A af te leiden); omgekeerd vinden we dat uit ¬B en C de premissen af te leiden zijn en dat geeft ons de geruststelling dat we niets overgeslagen hebben (dus dat A er niets toe doet); $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ en $\neg((A \rightarrow B) \rightarrow C)$ geven ¬A en ¬C en omgekeerd; $(\neg A \wedge B) \rightarrow C$, $\neg A \rightarrow D$, $\neg(B \rightarrow (C \vee D))$ zijn strijdig.

Voor de klassieke logica (de door ons hier gebruikte) is het mogelijk om wat meer systematisch te werk te gaan. We gebruiken α-regels (die aanleiding geven tot afbraak) $\frac{A \wedge B}{A}$, $\frac{A \wedge B}{B}$, $\frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$, $\frac{\neg(A \rightarrow B)}{A \wedge \neg B}$, $\frac{\neg\neg A}{A}$ en β-regels (die aanleiding tot splitsing geven) $\frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B}$, $\frac{A \rightarrow B}{\neg A \vee B}$ en bij $A \vee B$ maken we de uit school bekende gebaren (Men kan nog toevoegen $\frac{A \leftrightarrow B}{(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)}$, $\frac{A + B}{(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)}$.) We gaan zo te werk. De premissen (en eventueel de negatie van de conclusie, wanneer we een voorgestelde redenering willen controleren) komen onder elkaar te staan; de elementaire conclusies van een α-regel ook; bij een β-regel maken we twee takken. En zo gaan we door totdat alle niet-elementaire formules opgebruikt zijn (in ons klad kunnen we ze doorstrepen; in gedrukte tekst moeten ze worden afgesjekt). Staat er nog een β-premisse vóór een vertakking, dan moet hij in elke tak in rekening worden gebracht. Komt in een tak een tegenspraak voor, dan sluiten we hem af met bijv. een kruisje. We krijgen sterk het volgende vermoeden: zijn alle takken afgesloten, dan volgen uit de premissen alleen maar tegenspraken en dan zijn ze strijdig; blijven er enige takken open, dan volgt de adjunctie van de conjuncties der in de open takken overblijvende elementaire formules. We moeten wel erg oppassen met dit zonder meer te slikken, want eigenlijk hebben we hier een tweede systeem ontwikkeld om een afleiding te maken. Het precieze bewijs(1) kost enige bladzijden en is voor een inleidende cursus niet interessant; we verwijzen naar een aanhangsel of naar de literatuur. Wel zullen we aan enige voorbeelden laten zien dat een "boomstructuur" in een gebruikelijke afleiding kan worden omgezet, en dat geeft voldoende vertrouwen. (Wat wel vrij gauw volgt, is dat de conjunctie van de elementaire formules in een open tak alle daarboven staande nietelementaire formules impliceert; we van A en B besluiten op $A \wedge B$, en verder kunnen alle genoemde regels worden omgekeerd.)

(1) (dat we niets wezenlijk nieuws doen)

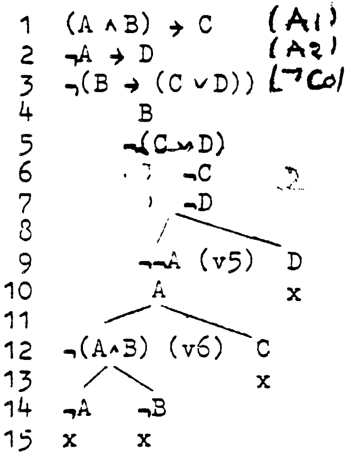


Structuurregel: tak afbreken wanneer tegenspraak bereikt is.

Om de overeenkomst tussen <u>boom</u> en <u>afleiding</u> beter te laten zien, zetten we die twee bij $P \vee Q$ behorende ondergeschikte afleidingen (stel P,..; stel Q,..) naast elkaar in plaats van onder elkaar.

Het invullen van de afleiding gebeurt aan de hand van de boom!

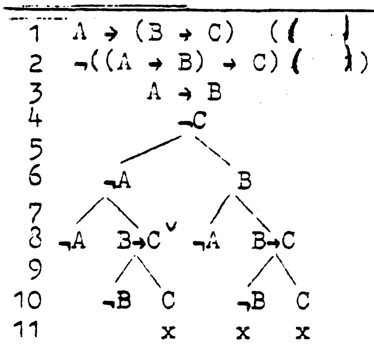
vb.1 (A1) (A2) [¬C0]



```
(A ∧ B) → C
¬A → D
¬(B → (C ∨ D))
--------------
B
¬(C ∨ D)
¬C
¬D
¬¬A ∨ D
  | ¬¬A
  | A
  | 1
  | ¬(A∧B)∨C
  |   | ¬(A∧B)
  |   | ¬A∨¬B
  |   |   | ¬A      | ¬B
  |   |   | 9       | 4
  |   |   | X       | X
  |   | X
  |   | C
  |   | 6
  |   | X
  | X
  | D
  | 7
  | X
X  (X willekeurig;
    neem overal S ∧ ¬S)
```

$\vdash (A_1 \wedge A_2) \to C$

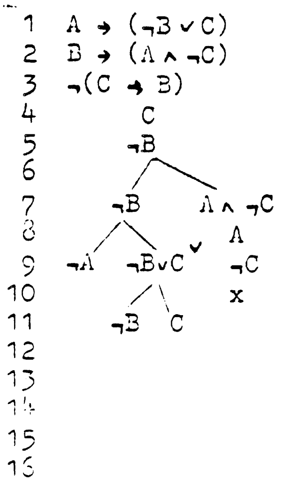
vb2



```
A → (B → C)
¬((A → B) → C)
--------------
A → B
¬C
¬A ∨ B
  | ¬A
  | 1
  | ¬A ∨ (B → C)
  |   | ¬A
  |   | 4
  |   | ¬A∧¬C
  |   | B → C
  |   | ¬B ∨ C
  |   |   | ¬B
  |   |   | 6
  |   |   | 4
  |   |   | ¬A∧¬C
  |   |   | C
  |   |   | 4
  |   |   | X
  |   | ¬A∧¬C
  | ¬A ∧ ¬C
  | B
  | 1
  | ¬A ∨ (B → C)
  |   | ¬A
  |   | 4
  |   | ¬A∧¬C
  |   | B → C
  |   | ¬B ∨ C
  |   |   | ¬B
  |   |   | 5
  |   |   | X
  |   |   | C
  |   |   | 4
  |   |   | X
  |   | X
  |   | X willekeurig; neem
  |   | overal ¬A ∧ ¬C
  | ¬A∧¬C
¬A ∧ ¬C
```

$\vdash A_1 \to C$

vb3



```
A → (¬B ∨ C)
B → (A ∧ ¬C)
¬(C → B)
--------------
C
¬B
¬B ∨ (A ∧ ¬C)
  | ¬B
  | 1
  | ¬A ∨ (¬B ∨ C)
  |   | ¬A
  |   | 4
  |   | 5
  |   | ¬B∧C
  |   | ¬B ∨ C
  |   |   | ¬B
  |   |   | 4
  |   |   | ¬B∧C
  |   |   | C
  |   |   | 5
  |   |   | ¬B∧C
  |   | ¬B∧C
  | ¬B∧C
  | A ∧ ¬C
  | ¬C
  | 4
  | X (neem ¬B ∧ C)
¬B∧C
```

$\vdash (A_1 \wedge A_2) \to C$

2. PREDIKATENLOGICA

Inleiding

Niet alle redeneringen kunnen met behulp van de junctorenlogica worden beschreven; de zinsontleding moet soms verder gaan dan die van het vorig hoofdstuk, de samenstelling met voegwoorden (en wat wij daarvoor laten doorgaan). Onderwerp en gezegde (subject en predicaat) komen nu aan de orde. Bijvoorbeeld:

Honden zijn dieren; 'n dier sterft; dus: honden sterven.

Geen rund heeft snavels; vogels hebben snavels; dus: geen rund is een vogel.

Sommige schapen zijn zwartharig; zwartharigen zijn niet blond; dus: sommige schapen zijn niet blond.

Wanneer iets zeldzaam is, is het waardevol; sommige stenen zijn niet waardevol; dus: sommige stenen zijn niet zeldzaam.

Het gedeelte van de logica dat zich met dergelijke redeneringen ophoudt, heet syllogistiek. Daar komen twee premissen voor, waarin drie begrippen optreden, en in de conclusie is een van die begrippen niet meer aanwezig. De gebruikte zinnen worden tot vier typen teruggebracht:

(A) alle a zijn b (elke a is b)
(I) sommige a zijn b
(E) geen a is b (elke a is geen b, -is niet-b, -is on-b)
(O) sommige a zijn geen b (-zijn niet-b, -zijn on-b)

Wij zouden dit met een heel klein beetje verzamelingsalgebra kunnen aanvatten (A zij de verzameling der dingen a, dus "s is ('n) a" wordt "$s \in A$" (is element van)):
type (A) wordt $A \subseteq B$ (de verzameling A is deel van de verzameling B), maar ook $A \cap B^c = \emptyset$ (de doorsnede van A en het complement van B is leeg),
type (I) wordt $A \cap B \neq \emptyset$,
type (E) wordt $A \subseteq B^c$ ofwel $A \cap B = \emptyset$,
type (O) wordt $A \cap B^c \neq \emptyset$,
waaruit we meteen zien dat I de negatie is van E, en O van A.
(Wij zouden de negatie van A willen schrijven als hetzij (1) "Niet:alle a zijn b", hetzij als (2) "Alle a zijn-niet b", maar het blijkt dat in het spraakgebruik (1) wordt opgevat als "niet-alle a zijn b", d.w.z. als "sommige a zijn niet-b" (dus toevallig goed), en (2) als "alle a zijn niet-b", dus als een E-zin.)

De genoemde voorbeelden kunnen zo worden gesymboliseerd:

$H \subseteq D$, $D \subseteq S$; dus $H \subseteq S$ (S is de verzameling van sterfelijke wezens),

$R \cap S = \emptyset$, $V \subseteq S$; dus $R \cap V = \emptyset$ (S is de verzameling der snaveldragers),

$S \cap Z \neq \emptyset$, $Z \subseteq B^c$; dus $S \cap B^c \neq \emptyset$ (S is de verzameling der schapen),

$Z \subseteq W$, $S \cap W^c \neq \emptyset$; dus $S \cap Z^c \neq \emptyset$ (S is de verzameling der stenen).

Was het nu maar zo dat met de syllogistiek alle redeneringen konden worden beschreven, dan zaten we op rozen. Helaas is het niet zo; we verwijzen een nadere bespreking van de syllogistiek naar Aanhangsel M, want het zou te veel tijd kosten. Zie de voorbeelden van ongetwijfeld correcte (juiste) redeneringen (waarbij we nog eens zien dat de waarheid van de premissen er niet toe doet):

Paarden zijn dieren; dus: paardestaarten zijn dierestaarten (de Morgan)

Cirkels zijn figuren; dus: iemand die een cirkel tekent, tekent een figuur (uit de middeleeuwen!)

Karl Marx werd geboren in 1813; hij was een groot dichter en schreef o.a. het toneelstuk "Hamlet". "Hamlet" werd gedrukt in 1500. Dus: er is iemand die voor zijn geboorte iets heeft gepubliceerd. (Eén stilgezwegen premisse zeker. Naar GK van het Reve.)

Hotels zijn duur en luxueus; sommige hotels zijn bouwvallig; dus: er zijn dure dingen die tevens bouwvallig zijn.

(Iets minder onsympathiek:) Er is een schilderij dat door alle kunstkenners wordt bewonderd. Dus: elke kunstkenner bewondert een of ander schilderij.

We gaan nu gebruik maken van een zinsontleding gelijkend op die in onderwerp en gezegde, maar die ver verwijderd is van een taalkundige ontleding. Neem een bewerin waarin een naam voorkomt, doe die weg en zet desnoods puntjes op de lege plaats. Dan hebben we een zogenaamd predicaat (open bewering, beweringsfunctie), en wel een eenledig (unair, monadisch) predicaat. Het kan gebeuren dat die naam niet als onderwerp van de zin optreedt, en ook dat hij op meer plaatsen in de zin voorkomt, soms door middel van verwijzende woorden. Bijvoorbeeld: ..is een priemgetal; ..is kleiner dan 7; 8 is kleiner dan..; .. is een getal zodanig dat het met 48 vermeerderd gelijk is aan zijn zevenvoud (dit wordt in een formulering die we straks nodig zullen hebben "..is een getal zodanig dat ..+48 = 7×..); ..werkt voor Piet die oom is van..'s vrouw. Bij "Leiden ligt tussen den Haag en Haarlem" kan men drie unaire predicaten maken.

Niets let ons om verschillende namen weg te laten en zodoende meerledige (polyadische) predicaten te maken: binair (dyadisch) zijn bijv. "..is kleiner dan..", "..en ..zijn gelijkvormig", "..=..", "..ligt tussen den Haag en..".

De eerste manier om van predicaten op beweringen te komen is natuurlijk om de omgekeerde weg te gaan: men "past het toe" op een naam of meer namen; daarbij ontstaat dan een ware bewering of een onware of een rare zin (dat laatste moeten we in onze wiskundige theorieën zien te vermijden). Het kan voorkomen dat op verschillende plaatsen dezelfde naam moet worden ingevuld; Quine geeft dat aan door op die plekken hetzelfde omkringde nummer te zetten. Mogen verschillende namen op verschillende plaatsen worden gezet, dan krijgen ze verschillende nummers; het is niet verboden om dezelfde naam op verschillend genummerde plekken te zetten. Op deze manier kan men ook de volgorde van invullen vastleggen. Van onze voorbeelden noemen we "(1) is een getal zodanig dat (1) + 48 = 7×(1)", "(1) werkt voor (2) die de oom is van (1)'s vrouw", "(1) ligt tussen (2) en (3)".

Men kort nu zo'n predicaat met (misschien meer dan n) open plekken genummerd (1),..,(n) af door één letter met aangehangen exponent n, bijv. P^n (predicaatletter P "met n argumenten"). Zijn $s_1,..,s_n$ (al dan niet verschillende) namen, dan staat $P^n s_1..s_n$ voor wat we krijgen door invullen van s_1 op de plaats(en) (1), s_2 op de plaatsen (2), enz.; het predicaat P heet dan toegepast op de subjecten $s_1,..,s_n$.

Opmerkingen. Het gelukt dikwijls om iets waaraan we de gedaante $P^1 s$ gegeven hebben met weinig taalmisbruik uit te spreken als "s heeft de eigenschap P, "s voldoet aan de voorwaarde P", "P slaat op s". Bij P^2ab kan men dikwijls zeggen "a en b staan in de relatie P", "a bezit de betrekking P met b"; soms schrijft men ook "(aPb)" voor "P^2ab". Wanneer het aantal argumenten van een predicaatletter uit de context duidelijk is, laten we de exponent wel eens weg.

Een tweede manier om van open beweringen tot beweringen te komen is het "quantificeren" van een predicaat. Neem eerst een unair predicaat, voorgesteld door P. De universele quantificatie van P is de bewering die in de loop der tijden werd uitgesproken als: P in alle gevallen, P aldoor (mooie afkorting : $\forall P$), voor elk ding, het heeft de eigenschap P. Dat laatste wordt afgekort $\forall xPx$, met een dode letter (gebonden variabele) x; deze noemt niets (is geen naam ergens van), maar is alleen een aanwijzer van alle open plaatsen in het predicaat (we hadden evengoed al die open plaatsen met kunnen verbinden door kromme lijntjes). (In Px alleen kan men zich nog voorstellen dat P slaat op een ding genaamd x.)
De existentiële quantificatie van P is de bewering: P in sommige gevallen, P minstens eens, P soms ($\exists P$), voor sommige dingen, ze hebben de eigenschap P, voor minstens een ding, het heeft P, $\exists xPx$.
Deze twee quantificaties werden tegen 1880 heruitgevonden door Frege en C.S.Peirce, en sindsdien intensief gebruikt (William of Shyreswood, +1249, kende ze al en had nog bovendien "nooit P"). $\forall$ en $\exists$ heten quantoren (quantificatoren). Hoewel we graag een extra werkwoord willen vermijden wanneer we alleen maar over zinnen spreken, is dat in de practijk moeilijk te laten. "$\forall xPx$" wordt dan "voor alle x geldt Px", "$\exists xPx$" "voor sommige x geldt Px", "er is 'n x met Px". Vooral bij opvolging van quantoren: "$\forall x\exists yRxy$" wordt "bij elke x is er 'n y met Rxy"; "$\exists x\forall yRxy$" "er is 'n x zodanig dat voor alle y geldt Rxy".

We symboliseren nu de AEIO-zinnen. Laat "αs" staan voor "s is 'n a", "$s \in A$".

A Alle a zijn b	$\forall x(\alpha x \rightarrow \beta x)$	en dus	I Geen a is b	$\exists x(\alpha x \wedge \neg \beta x)$
E Sommige a zijn b	$\exists x(\alpha x \wedge \beta x)$		O Sommige a zijn niet b	$\forall x(\alpha x \rightarrow \neg \beta x)$

Achter $\forall$ komt zowat altijd een $\rightarrow$, achter $\exists$ een $\wedge$: "Iedereen slaat Jan" resp. "Iemand slaat Jan" wordt "$\forall x$(x is een persoon $\rightarrow$ x slaat Jan)", "$\exists x$(x is een persoon $\wedge$ x slaat J

We gaan nu de voorbeelden op blz. 11 na. De syllogismen zijn gedaan met die AIEO-zinnen. Nu de paardestaarten. De premisse wordt I $\forall x(Px \rightarrow Dx)$. De conclusie gaan we trapsgewijs formaliseren: $\forall x$(x is paardestaart $\rightarrow$ x is dierestaart

x is staart van 'n paard

x is staart van iets en dat is 'n paard

voor zekere y: x is staart van y en Py

$\exists y(Sxy \wedge Py)$

en wanneer we vinden dat het in het consequent net zo moet gaan, komt
II $\forall x(\exists y(Sxy \wedge Py) \rightarrow \exists y(Sxy \wedge Dy))$ (had ook gemogen $\forall x(\exists y(Sxy \wedge Py) \rightarrow \exists z(Sxz \wedge Dz))$, want in beide gevallen staat er eigenlijk $\forall_1(\exists^1(S_1{}^1 - P^1) - \exists^1(S_1{}^1 - D^1))$.)
Maar een ander geeft er de voorkeur aan om uit te laten komen dat in het antecedent en in het consequent over hetzelfde beest gesproken wordt:

x is staart van y en Py $\rightarrow$ x is staart van y en Dy

Dan komt III $\forall x \forall y((Sxy \wedge Py) \rightarrow (Sxy \wedge Dy))$, en we zijn aan ons eerste probleem: wie heeft gelijk, zo daarvan al sprake is? Tenslotte komt er nog een ander die een ingeving heeft en ervan maakt IV $\forall x \forall y((Sxy \wedge Py) \rightarrow Dy)$. (Het zal blijken dat III en IV uit elkaar volgen (equivalent zijn), dat II uit III en III uit I volgt, zodat ook II uit I volgt.) Het voorbeeld van de cirkeltekenaar is precies hetzelfde.

De hotels. $\forall x(Hx \rightarrow (Dx \wedge Lx))$, $\exists x(Hx \wedge Bx)$ $\therefore$ (dus) $\exists x(Dx \wedge Bx)$ spreekt wel voor zichzelf. Marx moet u zelf doen. Het schilderij ("Buv" voor "u bewondert v"): $\exists x(Sx \wedge \forall y(Ky \rightarrow Byx))$ $\therefore$ $\forall x(Kx \rightarrow \exists y(Sy \wedge Bxy))$.

Vertaaloefeningen, monadisch. Aanwijzingen staan erbij.

1) If something is going wrong, then not everybody is working hard.

$\exists x$(x is going wrong) $\rightarrow$ $\neg\forall x$(x is a person $\rightarrow$ x is working hard)

2) Olaf has seen Stromboli but it was not erupting.

$\exists x$(x is a time $\wedge$ Olaf saw Stromboli at x $\wedge$ $\neg$Stromboli was erupting at x)

3) Tai always eats with chopsticks.

Is niet $\forall x$(x is a time $\rightarrow$ Tai eats at x with chopsticks),
maar $\forall x$((x is a time $\wedge$ Tai eats at x) $\rightarrow$ Tai uses chopsticks at x)

4a) If there are any abominable snowmen, I'll eat them.

$\forall x$(x is an ab.sn. $\rightarrow$ I will eat x)

4b) If there are any abominable snowmen, I'll eat my hat.

$\exists x$(x is an ab.sn.) $\rightarrow$ I will eat my hat (zal blijken equivalent te zijn met $\forall x$(x is an ab.sn. $\rightarrow$ I will eat my hat)

5) If something (anything) is a large mastiff, then it should be avoided if all dogs are vicious.

$\forall x$(x is a lr.mst. $\rightarrow$ if all dogs are vicious then x should be avoided)
$\forall y$(y is a dog $\rightarrow$ y is vicious) $\rightarrow$ x is to be avoided)

dus korter I $\forall x(Mx \rightarrow (\forall y(Dy \rightarrow Vy) \rightarrow Ax))$. Maar ook kan men vertalen
II $\forall x(\forall y(Dy \rightarrow Vy) \rightarrow (Mx \rightarrow Ax))$,
ook III $\forall x \exists y((Dy \rightarrow Vy) \rightarrow (Mx \rightarrow Ax))$,
zelfs IV $\forall x(Dx \rightarrow Vx) \rightarrow \forall x(Mx \rightarrow Ax)$.

(U krijgt later te zien dat al deze vier equivalent zijn.)

Monadisch, gemengd met propositieletters uit hoofdstuk 1:

Premisses: If the Bissagos report is to be trusted then the chargé d'affaires is a mere tool of the sisal interests and none of the natives really favored the coupon plan.

If the chargé d'affaires is a mere tool of the sisal interests then some of the natives either really favored the coupon plan or were actuated by a personal animosity against the deputy resident.

Conclusion: If the Bissagos report is to be trusted then some who were actuated by a personal animosity against the deputy resident did not really favor the coupon plan.

$r \rightarrow (t \wedge \forall x(Nx \rightarrow \neg Fx))$, $t \rightarrow \exists x(Nx \wedge (Fx \vee Ax))$ $\therefore$ $r \rightarrow \exists x(Ax \wedge \neg Fx)$

(Correctheid van deze redenering, evenals de andere beloften op deze bladzijde gedaan, vindt men aangetoond resp. ingelost op blz. A 6)

Vertaaloefeningen, polyadisch (met meerledige predicaten).

1) P.T.Barnum zei: You (one) can fool all people sometimes, and you can fool some people all times, but nobody can fool all people all times.
"Fabc" voor "person a fools person b at time c"
$\forall x\forall y\exists zFxyz \wedge \forall x\exists y\forall zFxyz \wedge \neg\exists x\forall y\forall zFxyz$

2) Annie kocht iets in de Bijenkorf en ruilde het daarna voor wat anders.
∃x(Annie kocht x ∧ ∃y(Annie ruilde x voor y)), maar niet $\exists xKx \wedge \exists x\exists yRxy$ of zo.
Een dergelijk probleem komen we tegen wanneer we in een algebraische theorie waarin de bewerking + is gedefinieerd, nu ook de nul en het tegengestelde willen invoeren: $\exists z(\forall x(x + z = x) \wedge \forall x\exists y(x + y = z))$, maar niet $\exists z\forall x(x + z = x) \wedge \forall x\exists y(x + y = z)$ want die laatste z heeft natuurlijk niets te maken met de dode letter z in het eerste stuk.

3) Everything has a cause.
Take any thing you will, something causes it
∀x(something causes x)
∀x(there is a thing such that it causes x)
∀x∃y(y causes x)

4) Something causes everything.
There is a thing such that it causes everything
∃y(y causes everything)
∃y(take any thing you will, y caused it)
∃y∀x(y causes x)

5) Somebody loves everybody.
∃x(x is a person ∧ ∀y(y is a person → x loves y))

6) Everybody loves a lover.
∀x(x is a person → x loves every person who is a lover)
(∀y(y is a person ∧ y is a lover) → x loves y)
y loves somebody
∃z(z is a person ∧ y loves z)
$\forall x(Px \rightarrow (\forall y(Py \wedge \exists z(Pz \wedge Lyz)) \rightarrow Lxy))$

7) Once a salesman sells a radio to a man who hates radios, he has mastered his trade.
∀x(x is a time → if at x a (any!) salesman sells a radio at x to a man who hates radios at x, he masters his trade by x)
.. → ∀y((y is a salesman ∧ y sells a (some!) radio at x to a man who hates radios at x) → y masters y's trade by x)
y sells..radios at x wordt ∃z(z is a radio ∧ y sells z at x to a (some!) man who hates radios at x) en het stuk y sells z..radios at x hierin wordt ∃w(w is a man ∧ w hates radios at x ∧ y sells z to w at x); het gedeelte w hates radios at x zal wel betekenen w hates all radios at x dus ∀v(v is a radio → w hates v at x). De rest doet u zelf maar. De uitvinder van dit schoon vraagstuk (Quine) zegt: Comparison with the given sentence shows that everyday language has certain virtues as a practical medium.

In 8-15: "Axy" voor "x attracts y" en dus ook voor "y is attracted by x".

8)	Everything attracts everything	∀ ∀ A	∀x∀yAxy	∀y∀xAyx
9)	Everything is attracted by everything	∀ ∀ A	∀y∀xAxy	∀x∀yAyx
10)	Something attracts everything	∃ ∀ A	∃x∀yAxy	∃y∀xAyx
11)	Everything is attracted by something	∀ ∃ A	∀y∃xAxy	∀x∃yAyx
12)	Something is attracted by everything	∃ ∀ A	∃y∀xAxy	∃x∀yAyx
13)	Everything attracts something	∀ ∃ V	∀x∃yAxy	∀y∃xAyx
14)	Something attracts something	∃ ∃ A	∃x∃yAxy	∃y∃xAyx
15)	Something is attracted by something	∃ ∃ A	∃y∃xAxy	∃x∃yAyx

Het zal blijken: 8 en 9 zijn equivalent; zo ook 14 en 15; uit 10 volgt 11 en uit 12 volgt 13, maar niet omgekeerd.

Redeneerregels

De fundamentele redeneerregels van de quantorenlogica geven de geoorloofde overgangen van Pa naar ∀xPx en ∃xPx en omgekeerd aan. Hoewel ogenschijnlijk opgeschreven voor een unaire predicaatletter is het de bedoeling dat zij gelden voor een willekeurig predicaat, hoe ingewikkeld ook, en bovendien voor een aangewezen voorkomen van de naam a. We geven enige voorbeelden van Pa en de bijbehorende Px in ∀xPx en ∃xPx (preciese voorschriften staan in Aanhangsel B; Q' is een 1- en R'' een 2-predicaatletter):

Q'a	Q'x	∀.R''.a	∀.R''.x
R''aa (1^e a aangewezen)	R''xa	∀yR''ya	∀yR''yx
R''aa (2^e a ,,)	R''ax	∀xR''xa	<u>niet</u> ∀xR''xx (dat komt van R''aa)
R''aa (beide ,,)	R''xx		maar ∀yR''yx of ∀.R''.x
R''ab	R''xb	∀xQ'x	∀yQ'y of ∀.Q'.

In het laatste komt helemaal geen a voor; dit grensgeval treedt meermalen op (ook een beweringsletter, bijv. r), en men verwacht dat r, ∀xr, ∃xr op hetzelfde neer zullen komen, d.w.z. dat ze equivalent zijn.

De eerste twee regels zijn eenvoudig: hebben we ∀xPx afgeleid, dan mag daarna Pa opgeschreven worden en als afgeleid beschouwd, voor een willekeurige naam a. En is Pa afgeleid voor een of andere naam a, dan mag daaruit volgen ∃xPx. (Zo volgen bijv. uit R''aa: ∃xR''xa, ∃xR''ax, ∃xR''xx.)

De andere twee vereisen meer. We zeggen dat ∀xPx afgeleid kan worden wanneer Pa afgeleid is "voor een geheel willekeurige" naam a; aangezien dat woord "willekeurig" nu al in veel betekenissen is voorgekomen, zullen we zeggen "onbelast", en daarmee bedoelen dat a in geen der premissen voorkomt. (Waarom moet dat nu? Neem een simpel geval: Stel Pa; kon dan ∀xPx volgen, dan hadden we de zonder premissen afgeleide formule Pa → ∀xPx, en dat is heel ongewenst. Ander voorbeeld: Stel ∀yR''ay; dus R''aa; dus (fout) ∀xR''xx. Pas eens toe op < !) <u>Bovendien</u> mag a niet meer in ∀xPx voorkomen (<u>bedenk vooreerst dat Px heel ingewikkeld kan zijn</u>) want we krijgen anders weer van die ongewenste gevolgen (bijv. Stel ∀xR''xx; dus R''aa; dus (fout) ∀xR''ax. Pas toe op =!)

En wanneer we ∃xPx hebben, is de gewone gang van zaken deze: nu, als er dan iets is met eigenschap P, noem het dan bijv. a, d.w.z. "Stel Pa". Daarbij wel zorgen dat die naam a nog nergens in de afleiding is voorgekomen, "vers" is. Dan doorgaan met conclusies trekken tot er een komt die de naam a niet meer bevat. Dan kan de extrapremisse "stel Pa" buiten werking gesteld (gedechargeerd) worden, en dan hebben we een conclusie uit (de premissen plus) ∃xPx getrokken. In de schrijfwijze van Fitch wordt die extrapremisse natuurlijk in een nieuwe kolom gezet, en men kan daar desnoods die letter a nog eens voor zetten ter waarschuwing (nl. dat die "barrière" niet door a mag worden overschreden. Wij zullen meestal de letter c gebruiken.) (Wat kan er allemaal mis gaan wanneer we deze voorschriften vergeten? "Stel Pa" weglaten, d.w.z. zeggen: Stel ∃xPx; dus Pa. Dan zouden we de zonder aannamen afgeleide ongewenste formule ∃xPx → Pa krijgen! Met a in de vorige kolom springen of geen verse naam gebruiken geeft iets dergelijks:

```
| ∀x∃yR''xy                     | ∃xR''xx
|----------                     |--------
| ∃yR''ay                       |  | R''aa
|  | R''aa  (fout)              |  |------
|  |------                      |  | ∃xR''ax  (goed)
|  | ∃xR''xx                    | ∃xR''ax   (fout)
| ∃xR''xx (Pas toe op < !)      ∃xR''xx → ∃xR''ax
```

Samenvatting van introductie en eliminatie van ∀ en ∃:

1. ⋮
∀xPx
⋮
Pa
⋮
	2. ⋮
	Pa
	⋮
	∃xPx
	⋮
		3. ⋮
		Pa
		⋮
		∀xPx
		⋮
		
		<u>mits</u> a niet in de premissen en niet in ∀xPx voorkomt
			4. ⋮
			∃xPx
			c | Pc
			  | ⋮
			  | Q
			  | ⋮
			⋮
			Q
			⋮
			
			waarin c een nieuwe naam is die ook niet in Q voorkomt

Als voorbeeld volgen eerst vier belangrijke regels omtrent quantoren en negatie. De laatste "gaat klassiek" (toepassing van $\neg\neg A \to A$); altijd moeizaam.

```
|∀x¬Px          |¬∃xPx       |∃x¬Px          |¬∀xPx            deze      |¬∀xPx
|-----          |-----       |-----          |-----            anders:   |-----
| |∃xPx         | |Pa        | |∀xPx         | |¬∃x¬Px                   | |¬∃x¬Px
| |-----        | |--        | |-----        | |------                   | |∀x¬¬Px (met de 2e links)
| | |Pc         | |∃xPx      | |1            | | |¬Pa                    | |¬¬Pa
| | |--         | |1         | | |¬Pc        | | |---                    | |Pa
| | |1          |¬Pa         | | |---        | | |∃x¬Px                  | |∀xPx
| | |¬Pc        |∀x¬Px       | | |2          | | |2                      | |1
| | |¬∃xPx                   | | |Pc         | |¬¬Pa                     |¬¬∃x¬Px
| |¬∃xPx                     | | |¬∀xPx      | |Pa                       |∃x¬Px
|¬∃xPx                       | |¬∀xPx        | |∀xPx
                             |¬∀xPx          | |1
                                             |¬¬∃x¬Px
                                             |∃x¬Px
```

De boommethode

In een tak komt voor			
∀xPx	∃xPx	¬∀xPx	¬∃xPx
P toepassen op elke reeds voorgekomen naam of anders op een willekeurig gekozen naam. ∀P niet doorstrepen ("bron blijft vloeien")	P toepassen op een totdusver niet voorgekomen naam. ∃P wel doorstrepen.	Doorstrepen en eronder zetten ∃x¬Px	∀x¬Px

We hopen weer dat een in alle takken afgesloten boom om te zetten is in een afleiding. Hiertoe een voorbeeld (twee andere afleidingen vindt men op blz.15 - 16 bij nr.39). Een openblijvende tak geeft vermoeden van onafleidbaarheid (voorbeelden bij de formules hierna).

vb.

```
 1        ∃xPx → ∃xQx          (A|¬C)       |∃xPx → ∃xQx                 ⊢ P → C
 2            ¬∃x(Px → Qx)                  | |¬∃x(Px → Qx)
 3            ∀x¬(Px → Qx)                  | |∀x¬(Px → Qx)
 4              /        \                  | |1
 5   ¬∃xPx  (v3)       ∃xQx  (v4)           | |¬∃xPx ∨ ∃xQx
 6   ∀x¬Px  bron 2     Qa                   | | |¬∃xPx            |∃xQx
 7   ¬Pa               ¬(Pa → Qa) (v5)      | | |∀x¬Px            | |Qc
 8   ¬(Pa → Qa)(v6)    Pa                   | | |¬Pa              | |3
 9   Pa                ¬Qa                  | | |3                | |¬(Pc → Qc)
10    x                 x                   | | |¬(Pa → Qa)       | |¬Qc
11                                          | | |Pa               | |X
12                                          | | |X                |X
13                                          | |X        Kies ∃x(Px → Qx) voor X
14                                          |¬¬X
15                                          |∃x(Px → Qx)
```

Nu volgt een reeks (zonder aannamen afgeleide) formules. De nummers vergemakkelijken het opzoeken van de afleiding in Aanhangsel A. Twee nummers vóór een $\leftrightarrow$: het eerste hoort bij $\rightarrow$, het tweede bij $\leftarrow$. De formules zijn een beetje gegroepeerd naar interesse en naar het aantal fouten en misverstanden. Het is niet de bedoeling dat zij uit het hoofd geleerd worden.

1 $\forall xPx \to Pa$

1' $\forall y(\forall xPx \to Py)$

(voor elk ding: als alles de eigenschap P heeft, dan heeft het de eigenschap P)

2 $Pa \to \exists xPx$

2' $\forall y(Py \to \exists xPx)$

(er is 'n ding zodanig dat als het de eigenschap P heeft, dan is er iets met de eigenschap P)

3 $\forall xPx \to \exists xPx$

Het is duidelijk dat met behulp van 3 uit 1' en 2' volgt: <u>1''</u> $\exists y(\forall xPx \to Py)$ en <u>2''</u> $\exists y(Py \to \exists xPx)$, eveneens dat wij niet moeten verwachten om $Pa \to \forall xPx$ en $\exists xPx \to Pa$ af te kunnen leiden en evenmin $\forall y(Py \to \forall xPx)$ en $\forall y(\exists xPx \to Py)$. De bomen blijven open.

Wel geldt (klassiek): <u>4</u> $\exists y(Py \to \forall xPx)$ <u>5</u> $\exists y(\exists xPx \to Py)$ (er is iets zodanig dat als het de eigenschap P heeft, alles P heeft,; resp. er is iets zodanig dat als 'n ding P heeft, het eerste ook P heeft.)

<u>6</u> r, $\forall xr$, $\exists xr$ zijn equivalent (mits x niet in r voorkomt)

<u>Quantoren en negatie</u>: <u>11</u>, <u>12</u> $\forall x\neg Px \leftrightarrow \neg\exists xPx$

<u>13</u>, <u>14</u> $\exists x\neg Px \leftrightarrow \neg\forall xPx$ (14 klassiek)

<u>15</u>, <u>16</u> $\forall xPx \leftrightarrow \neg\exists x\neg Px$ (16 klassiek)

<u>17</u>, <u>18</u> $\exists xPx \leftrightarrow \neg\forall x\neg Px$ (18 klassiek)

<u>Distributie van quantoren over junctoren</u>:

$\wedge$ <u>21</u>, <u>22</u> $\forall x(Px \wedge Qx) \leftrightarrow (\forall xPx \wedge \forall xQx)$

<u>23</u> $\exists x(Px \wedge Qx) \to (\exists xPx \wedge \exists xQx)$, <u>niet</u> omgekeerd (boom; tegenvoorbeeld: P "is even", Q "is oneven")

Niet zo interessant zijn <u>24</u> $(\forall xPx \wedge \exists xQx) \to \exists x(Px \wedge Qx)$

<u>25</u> $(\exists xPx \wedge \forall xQx) \to \exists x(Px \wedge Qx)$

Figuurtje (waarin geen enkele pijl kan worden omgekeerd; afgekorte schrijfwijze):

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & (\forall P \wedge \exists Q) \arrow[dr] & & \\
\left\{\begin{matrix}\forall(P\wedge Q)\\ (\forall P \wedge \forall Q)\end{matrix}\right\} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \exists(P\wedge Q) \arrow[r] & (\exists P \wedge \exists Q) \\
 & (\exists P \wedge \forall Q) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Schrijfwijze "$\bigwedge x$" (oud "$\prod x$"; "grote en") voor "$\forall x$".

$\vee$ <u>26</u>, <u>27</u> $\exists x(Px \vee Qx) \leftrightarrow (\exists xPx \vee \exists xQx)$

<u>28</u> $(\forall xPx \vee \forall xQx) \to \forall x(Px \vee Qx)$, <u>niet</u> omgekeerd (als bij 23)

Men kan nog "interpoleren" <u>29</u> $(\forall xPx \vee \exists xQx) \to \exists x(Px \vee Qx)$

<u>30</u> $(\exists xPx \vee \forall xQx) \to \exists x(Px \vee Qx)$

en (klassiek) <u>31</u> $\forall x(Px \vee Qx) \to (\forall xPx \vee \exists xQx)$

<u>32</u> $\forall x(Px \vee Qx) \to (\exists xPx \vee \forall xQx)$

Figuurtje (klassiek) waarin weer geen enkele pijl kan worden omgekeerd:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & (\forall P \vee \exists Q) \arrow[dr] & \\
(\forall P \vee \forall Q) \arrow[r] & \forall(P\vee Q) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \left\{\begin{matrix}\exists(P\vee Q)\\ (\exists P \vee \exists Q)\end{matrix}\right\} \\
 & & (\exists P \vee \forall Q) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Schrijfwijze "$\bigvee x$" (oud "$\sum x$"; "grote of") voor "$\exists x$".

De importvormen van 33-36 te weten (afgekort)

$\to$ <u>33</u> $\forall x(Px \to Qx) \to (\forall xPx \to \forall xQx)$ $(\forall(P \to Q) \wedge \forall P) \to \forall Q$

<u>34</u> $\forall x(Px \to Qx) \to (\forall xPx \to \exists xQx)$ $(\forall(P \to Q) \wedge \forall P) \to \exists Q$

<u>35</u> $\forall x(Px \to Qx) \to (\exists xPx \to \exists xQx)$ $(\forall(P \to Q) \wedge \exists P) \to \exists Q$

<u>36</u> $\exists x(Px \to Qx) \to (\forall xPx \to \exists xQx)$ $(\exists(P \to Q) \wedge \forall P) \to \exists Q$

zijn gemakkelijk te onthouden (de tweede is niet zo belangrijk want hij volgt direct uit 33-imp en 3). Voor de rechterleden van 33-36 geldt overigens

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & (\forall P \to \forall Q) \arrow[dr] & \\
(\exists P \to \forall Q) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (\forall P \to \exists Q) \\
 & (\exists P \to \exists Q) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

; dat vindt men bijv. door substitutie in de formules (zonder aannamen afgeleid) van de junctorenlogica $(A\to B) \to ((B\to C)\to(A\to C))$, $(A\to B) \to ((C\to A)\to(C\to B))$, nl.

$(\forall P \to \exists P) \to ((\exists P \to \substack{\forall\\ \exists}Q) \to (\forall P \to \substack{\forall\\ \exists}Q))$ resp. $(\forall Q \to \exists Q) \to ((\substack{\forall\\ \exists}P \to \forall Q) \to (\substack{\forall\\ \exists}P \to \exists Q))$.

De formules $\forall(P\to Q)$ en $\exists(P\to Q)$ kunnen nu als volgt worden ingepast:

$\underline{37}$ $(\exists xPx \to \forall xQx) \to \forall x(Px \to Qx)$
$\underline{38}$ $(\forall xPx \to \forall xQx) \to \exists x(Px \to Qx)$
$\underline{39}$ $(\exists xPx \to \exists xQx) \to \exists x(Px \to Qx)$
$\underline{40}$ $(\forall xPx \to \exists xQx) \to \exists x(Px \to Qx)$

waarvan 38-40 klassiek zijn. We zien ook uit het vorige dat, zodra we 40 hebben, 38 en 39 afgeleid kunnen worden.

Figuurtje (klassiek) waarin wederom geen pijl omkeerbaar is:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (\forall P \to \forall Q) \arrow[dr] & \\
(\exists P \to \forall Q) \to \forall(P \to Q) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \left\{\begin{matrix}\exists(P \to Q)\\ (\forall P \to \exists Q)\end{matrix}\right\} \\
 & (\exists P \to \exists Q) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

<u>Distributie van quantoren over junctoren, waarbij één component "constant" is,</u> d.w.z. x niet bevat: (x komt niet voor in r)

$\underline{41}, \underline{42}$ $\forall x(r \wedge Px) \leftrightarrow (r \wedge \forall xPx$ | $\underline{43}, \underline{44}$ $\exists x(r \wedge Px) \leftrightarrow (r \wedge \exists xPx)$

$\underline{45}, \underline{46}$ $\forall x(r \vee Px) \leftrightarrow (r \vee \forall xPx)$ | $\underline{47}, \underline{48}$ $\exists x(r \vee Px) \leftrightarrow (r \vee \exists xPx)$

$\underline{49}, \underline{50}$ $\forall x(r \to Px) \leftrightarrow (r \to \forall xPx)$ | $\underline{51}, \underline{52}$ $\exists x(r \to Px) \leftrightarrow (r \to \exists xPx)$

$\underline{53}, \underline{54}$ $\forall x(Px \to r) \leftrightarrow (\exists xPx \to r)$ | $\underline{55}, \underline{56}$ $\exists x(Px \to r) \leftrightarrow (\forall xPx \to r)$

waarvan 45, 52, 56 klassiek zijn en waarbij u vooral op 53-56 moet letten.

$\underline{57}$ $\forall x(Px \to r) \to (\forall xPx \to r)$ $\qquad$ $\underline{58}$ $(\exists xPx \to r) \to \exists x(Px \to r)$

beide niet omgekeerd. 58 klassiek.

Enige vraagstukjes in de gedaante van een figuur:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \left\{\begin{matrix}(r \leftrightarrow \exists P)\\ ((r \to \exists P) \wedge (\exists P \to r))\end{matrix}\right\} \arrow[dr] & \\
\left\{\begin{matrix}\forall(r \leftrightarrow P)\\ ((r \to \forall P) \wedge (\exists P \to r))\end{matrix}\right\} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \exists(r \leftrightarrow P) \to ((r \to \exists P) \wedge (\forall P \to r)) \\
 & \left\{\begin{matrix}(r \leftrightarrow \forall P)\\ ((r \to \forall P) \wedge (\forall P \to r))\end{matrix}\right\} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

<u>Dubbele quantificatie</u>. $\forall xy$ is een voor de hand liggende afkorting van $\forall x\forall y$; dgl. $\exists xy$.

$\underline{61}$ $\forall x\forall yRxy \leftrightarrow \forall y\forall xRxy$ $\qquad$ $\underline{62}$ $\exists x\forall yRxy \to \forall y\exists xRxy$ $\qquad$ $\underline{63}$ $\exists x\exists yRxy \leftrightarrow \exists y\exists xRxy$

<u>niet</u> omgekeerd.

$\underline{64}$ $\forall x\forall yRxy \to \forall xRxx$ $\qquad$ $\underline{65}$ $\exists xRxx \to \exists x\exists yRxy$

Hierbij het figuurtje dat in elk boek van Kuratowski voorkomt:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \exists x\forall yRxy \arrow[r] \arrow[dr] & \forall y\exists xRxy \arrow[dr] & \\
\left\{\begin{matrix}\forall x\forall yRxy\\ \forall xyRxy\\ \forall y\forall xRxy\end{matrix}\right\} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \forall xRxx \arrow[r] & \exists xRxx \arrow[r] & \left\{\begin{matrix}\exists x\exists yRxy\\ \exists xyRxy\\ \exists y\exists xRxy\end{matrix}\right\} \\
 & \exists y\forall xRxy \arrow[r] \arrow[ur] & \forall x\exists yRxy \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

<u>Beperkte ofwel voorwaardelijke quantoren</u> (restricted quantifiers; bedingte Quantoren).

Men definieert (": $\leftrightarrow$ " betekent: "per definitie equivalent met"):

$\forall_U xPx :\leftrightarrow \forall x(Ux \to Px)$ en $\exists_U xPx :\leftrightarrow \exists x(Ux \wedge Px)$.

(De schrijfwijze is van Enderton; men vindt ook $\forall_{Ux}$ en $\forall_{x \in \underline{U}}$, waarin $x \in \underline{U}$ hetzelfde moet betekenen als Ux.)

Gauw volgt: $\forall xPx \to \forall_U xPx$ en $\exists_U xPx \to \exists xPx$. Van onze formules blijven sommige gelden voor deze beperkte quantoren (zo de nummers 11-18), maar van 3 en 6 blijft weinig over. Plaatsen we er "$\exists xUx \to$" voor, dan ontstaan wel afleidbare formules, hetwelk ons niet behoort te verbazen. Het wordt een vraagstukkenserie om uit te zoeken welke formules in welke gedaante overblijven; zie nader blz.17.

Tot slot een vraagstukje. Laat bekend zijn: $\neg\exists xOx$. Leid af: $\forall_O xPx$ (voor willekeurig predicaat). Schrijf verder $x \in \emptyset$ voor Ox (x is element van de lege verzameling). Geef nu in woorden aan wat u zojuist hebt afgeleid. Kan dat het volgende zijn: "$\emptyset$ bevat geen elementen, en dus is iedere uitspraak (zowel als de ontkenning ervan) over de elementen van $\emptyset$ juist."?(citaat uit een pas verschenen boek.)

4. DE PREDIKATENLOGICA MET IDENTITEIT

Predicatenlogica (quantorenlogica) met identiteit. Een binair predicaat dat door velen tot de logica gerekend wordt is dat van identiteit. We schrijven Iab of ook $(a = b)$ voor "a is identiek met b", zeggen ook wel "a is gelijk aan b", en laten dikwijls de haakjes weg in ingewikkelde formules (we zijn immers van kindsbeen af gewend om de tekenrij $a = b$ bij elkaar te trekken). Het teken = wordt in deze opvatting bij de logische tekens gerekend. Ook wordt $\neg(a=b)$ afgekort tot $a \neq b$.

Ten grondslag liggen de zonder aannamen gestelde formule $\forall x(x = x)$ en de afleiding van Pb uit de premissen Pa en a=b. Hierin stelt Pa weer voor een ingewikkeld predicaat met aangewezen voorkomen van de naam a; het is hier misschien verkieslijker om dat aan te geven met ..a.. (de puntjes staan voor tekens en ..a.. staat voor een formule); in de voorbeelden zullen we dat voorkomen ook wel eens onderstrepen.

Wat we kunnen beginnen met Pb en a=b volgt snel (zie hieronder): conclusie Pb.

Samenvatting van de grondregels:		Regels voor de boom-methode:	
Op elke plaats in een afleiding mag men een formule van type $a = a$ opschrijven (a is een willekeurige naam).	Pa (1) : $a = b$ (2) : Pb : (de stukken (1) en (2) mogen in andere volgorde voorkomen)	Een tak waarin voorkomt $a \neq a$ afsluiten.	Komen in een tak voor ..a.. en a=b of ook b=a dan toevoegen ..b.. (Niets doorstrepen.)

Voorbeelden (het is duidelijk dat Pb, (b=a) $\therefore$ Pa volgens grondregel gaat).

Pb +
$\underline{a = b}$ (2)
$\underline{a} = a$ zaaf (1)
$b = a$ ++ uit (1,2)
Pa uit +,++

Symmetrie:
$\underline{a = b}$
$\underline{a} = a$
$b = a$

Transitiviteit:
$a = b$
$\underline{b} = c$
$b = a$ met symm.
$a = c$

anders:
$a = \underline{b}$
$\underline{b = c}$
$a = c$

$a = a$
$\exists x(x = a)$
$\forall y \exists x(x = y)$ zaaf!

Hoe geeft men aan: er is minstens één ding met eigenschap P? $\exists xPx$.
Er is hoogstens één ding met P? $\forall y \forall z((Py \wedge Pz) \rightarrow y=z)$. Er is precies één ding met P?
I $\exists xPx \wedge \forall yz(Py \wedge Pz \rightarrow y=z)$, ook II $\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow y=x)$, ook III $\exists x \forall y(Py \leftrightarrow y=x)$.
(Opgave: bewijs de equivalentie). Afkorting hiervoor $\exists !xPx$ (ook $\exists_1 xPx$).
Er zijn minstens twee (verschillende) dingen met P: $\exists xy(Px \wedge Py \rightarrow x \neq y)$, of ook "niet hoogstens één": $\neg\forall xy(Px \wedge Py \rightarrow x=y)$.
Er zijn hoogstens twee verschillende dingen met P: $\forall xyz(Px \wedge Py \wedge Pz \rightarrow x=y \vee y=z \vee z=x)$

OPGAVEN. 66, 67 $\forall xy\neg Rxy \leftrightarrow \neg\exists xyRxy$ — 70, 71 $\forall x \exists y\neg Rxy \leftrightarrow \neg\exists x \forall yRxy$
68, 69 $\exists xy\neg Rxy \leftrightarrow \neg\forall xyRxy$ — 72, 73 $\exists x \forall y\neg Rxy \leftrightarrow \neg\forall x \exists yRxy$
(69, 71, 73 klassiek)

In speciale gevallen kan 62 ($\exists x \forall yRxy \rightarrow \forall y \exists xRxy$) omgekeerd worden, bijv. voor Rxy van de gedaante $Px \wedge Qy$, $Px \vee Qy$, $Px \rightarrow Qy$ (y niet in P, x niet in Q), $Py \rightarrow Qx$ (x niet in P, y niet in Q). Men krijgt (afgekorte schrijfwijze):

74 $(\exists P \wedge \forall Q) \rightarrow \exists x \forall y(Px \wedge Qy)$ — 75 $\forall y \exists x(Px \wedge Qy) \rightarrow (\exists P \wedge \forall Q)$
76 $(\exists P \vee \forall Q) \rightarrow \exists x \forall y(Px \vee Qy)$ — 77 $\forall y \exists x(Px \vee Qy) \rightarrow (\exists P \vee \forall Q)$
78 $(\forall P \rightarrow \forall Q) \rightarrow \exists x \forall y(Px \rightarrow Qy)$ — 79 $\forall y \exists x(Px \rightarrow Qy) \rightarrow (\forall P \rightarrow \forall Q)$
80 $(\exists P \rightarrow \exists Q) \rightarrow \exists x \forall y(Py \rightarrow Qx)$ — 81 $\forall y \exists x(Py \rightarrow Qx) \rightarrow (\exists P \rightarrow \exists Q)$

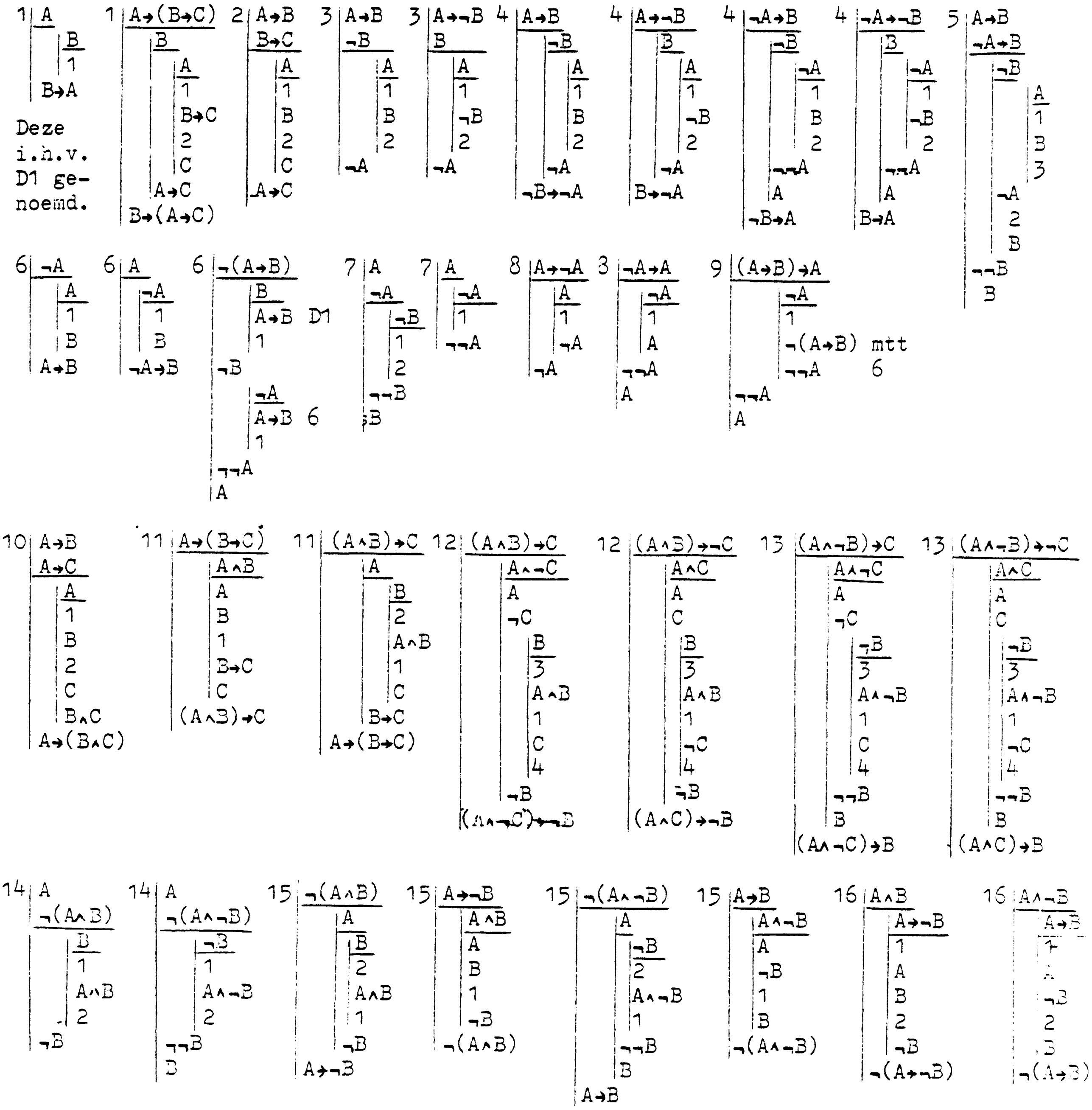
(77, 78, 80 klassiek). Volgens 62 loopt nog een pijl van links naar rechts, zodat de vier formules op één regel druks equivalent zijn. Onder dezelfde voorwaarden voor P en Q geldt (85 klassiek):

82, 83 $(\exists P \wedge \exists Q) \longleftrightarrow \exists x \exists y(Px \wedge Qy)$ — 84, 85 $(\forall P \vee \forall Q) \longleftrightarrow \forall x \forall y(Px \vee Qy)$

Aanhangsel A

Afleidingen van de redeneerregels op blz. 3

N.B. Een nummer voorkomend <u>in</u> een kolom van een afleiding verwijst naar de formule op de regel met hetzelfde nummer in die afleiding.
Een nummer <u>naast</u> een kolom verwijst naar een (der) redeneerregel(s) voorkomend in de regel met hetzelfde nummer op blz. 3.
Een afkorting (bijv. mtt) verwijst naar een op blz.3 voorkomende redeneerregel (in het voorbeeld: modus tollendo tollens).



```
16 | ¬(A→¬B)
   |   | ¬B
   |   | A→¬B  D1
   |   | 1
   | ¬¬B
   | B
   |   | ¬A
   |   | A→¬B  6
   |   | 1
   | ¬¬A
   | A
   | A∧B

16 | ¬(A→B)
   |   | B
   |   | A→B
   |   | 1
   | ¬B
   |   | ¬A
   |   | A→B
   |   | 1
   | ¬¬A
   | A
   | A∧¬B

17 | A→C
   | B→C
   |   | A∨B
   |   |   | A
   |   |   | 1
   |   |   | C
   |   |   | B
   |   |   | 2
   |   |   | C
   |   | C
   | (A∨B)→C

18 | A∨B
   | A→C
   | B→D
   |   | A
   |   | 2
   |   | C
   |   | C∨D
   |   | B
   |   | 2
   |   | D
   |   | C∨D
   | C∨D

19 | A→(B∨C)
   | ¬B
   | ¬C
   |   | A
   |   | 1
   |   | B∨C
   |   | 2
   |   | C  mtp
   |   | 3
   | ¬A

19 | A→B
   | C→D
   | ¬B∨¬D
   |   | ¬B
   |   | 1
   |   | ¬A  mtt
   |   | ¬A∨¬C
   |   | ¬D
   |   | 2
   |   | ¬C
   |   | ¬A∨¬C
   | ¬A∨¬C

20 | ¬A
   | A∨B
   |   | A
   |   | 1
   |   | B
   |   | B
   |   | B
   | B

20 | A
   | ¬A∨B
   |   | ¬A
   |   | 1
   |   | B
   |   | B
   |   | B
   | B

21 | A∨B
   |   | ¬A
   |   | 1
   |   | B
   | ¬A→B

   | ¬A∨B
   |   | A
   |   | 1
   |   | B
   | A→B

21 | ¬A→B
   |   | ¬(A∨B)
   |   |   | ¬A
   |   |   | 1
   |   |   | B
   |   |   | A∨B
   |   |   | 2
   |   | ¬¬A
   |   | A
   |   | A∨B
   | ¬¬(A∨B)
   | A∨B

21 | A→B
   |   | ¬(¬A∨B)
   |   |   | A
   |   |   | 1
   |   |   | B
   |   |   | ¬A∨B
   |   |   | 2
   |   | ¬A
   |   | ¬A∨B
   | ¬¬(¬A∨B)
   | ¬A∨B

22 | ¬(A∨B)
   |   | A
   |   | A∨B
   |   | 1
   | ¬A
   |   | B
   |   | A∨B
   |   | 1
   | ¬B
   | ¬A∧¬B

22 | ¬A∧¬B
   |   | A∨B
   |   | 1
   |   | ¬A
   |   | ¬B
   |   | 2
   |   | B  mtp
   | ¬(A∨B)

22 | A∧B
   |   | ¬A∨¬B
   |   | 1
   |   | A
   |   | B
   |   | 2
   |   | ¬B
   | ¬(¬A∨¬B)

23 | ¬A∨¬B
   |   | A∧B
   |   | A
   |   | B
   |   | 1
   |   | ¬B
   | ¬(A∧B)

23 | A∨B
   |   | ¬A∧¬B
   |   | ¬A
   |   | ¬B
   |   | 1
   |   | B
   | ¬(¬A∧¬B)

23 | ¬(A∧B)
   |   | ¬(¬A∨¬B)
   |   |   | A
   |   |   | 1
   |   |   | ¬B  mpt
   |   |   | ¬A∨¬B
   |   |   | 2
   |   | ¬A
   |   | ¬A∨¬B
   | ¬¬(¬A∨¬B)
   | ¬A∨¬B

24 | A→(¬B∨C)
   |   | A∧B
   |   | A
   |   | B
   |   | 1
   |   | ¬B∨C
   |   | C  mtp
   | (A∧B)→C

24 | A→(B∨C)
   |   | A∧¬B
   |   | A
   |   | ¬B
   |   | 1
   |   | B∨C
   |   | C  mtp
   | (A∧¬B)→C

24 | (A∧B)→C
   | A→(B→C)  11
   |   | A
   |   | 2
   |   | B→C
   |   | ¬B∨C  21
   | A→(¬B∨C)

24 | (A∧¬B)→C
   | A→(¬B→C)
   |   | A
   |   | 2
   |   | ¬B→C
   |   | B∨C  21
   | A→(B∨C)

25 | A→(B∨C)
   | (A∧B)→C
   |   | A
   |   | 1
   |   | B∨C
   |   |   | B
   |   |   | 3
   |   |   | A∧B
   |   |   | 2
   |   |   | C
   |   |   | C
   |   |   | C
   |   | C
   | A→C

25 | A→C
   | A→D
   | B→C
   | B→D
   |   | A∨B
   |   |   | A
   |   |   | 1
   |   |   | C
   |   |   | 2
   |   |   | D
   |   |   | C∧D
   |   |   | B
   |   |   | 3
   |   |   | C
   |   |   | 4
   |   |   | D
   |   |   | C∧D
   |   | C∧D
   | (A∨B)→(C∧D)

26 | A∨B
   |   | A
   |   |   | A→B
   |   |   | 2
   |   |   | B
   |   | (A→B)→B
   |   | B
   |   | (A→B)→B  D1
   | (A→B)→B

26 | (A→B)→B
   |   | ¬(A∨B)
   |   | ¬A  22
   |   | ¬B
   |   | A→B  6
   |   | 1
   |   | B
   | ¬¬(A∨B)
   | A∨B

27 | A→C
   | B→D
   | A∨B
   | ¬(C∧D)
   |   | C
   |   | 4
   |   | ¬D  mpt
   |   | 2
   |   | ¬B  mtt
   |   | 3
   |   | A  mtp
   | C→A. Dgl.D→B
```

Afleiding van de formules op blz. 7. Om ruimte te besparen is de eerste kolom (zonder aannamen; onderaan zou de af te leiden formule staan) weggelaten.

```
1 | ¬A
  | | ¬¬A
  | | 1
  | ¬¬¬A

1 | ¬¬¬A
  | | A
  | | ¬¬A 7
  | ¬A
```

2 en 3 omgekeerd zelf doen

```
2 | A ∧ B
  | A
  | B
  | B ∧ A

2 | A ∨ B
  | | A
  | | B ∨ A
  | | B
  | | B ∨ A
  | B ∨ A

3 | (A ∧ B) ∧ C
  | A ∧ B
  | C
  | A
  | B
  | B ∧ C
  | A ∧ (B ∧ C)

3 | (A ∨ B) ∨ C
  | | A ∨ B
  | | | A
  | | | A ∨ (B ∨ C)
  | | | B
  | | | B ∨ C
  | | | A ∨ (B ∨ C)
  | | A ∨ (B ∨ C)
  | | C
  | | B ∨ C
  | | A ∨ (B ∨ C)
  | A ∨ (B ∨ C)

4 | A
  | A
  | A ∧ A

4 | A ∧ A
  | A

4 | A
  | A ∨ A

4 | A ∨ A
  | | A
  | | A
  | | A
  | | A
  | A
```

```
5 | (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)
  | A ∨ B
  | A ∨ C
  | | A
  | | A ∨ (B ∧ C)
  | | B
  | | 3
  | | | A
  | | | A ∨ (B ∧ C)
  | | | C
  | | | 6
  | | | B ∧ C
  | | | A ∨ (B ∧ C)
  | | A ∨ (B ∧ C)
  | A ∨ (B ∧ C)

5 | A ∨ (B ∧ C)
  | | A
  | | A ∨ B
  | | A ∨ C
  | | (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)
  | | B ∧ C
  | | B
  | | C
  | | A ∨ B
  | | A ∨ C
  | | (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)
  | (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)

6 | A ∧ (B ∨ C)
  | A
  | B ∨ C
  | | B
  | | 2
  | | A ∧ B
  | | (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)
  | | C
  | | 2
  | | A ∧ C
  | | (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)
  | (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)

6 | (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)
  | | A ∧ B
  | | A
  | | B
  | | B ∨ C
  | | A ∧ (B ∨ C)
  | | A ∧ C
  | | A
  | | C
  | | B ∨ C
  | | A ∧ (B ∨ C)
  | A ∧ (B ∨ C)

7 | (A ∧ B) ∨ A
  | | A ∧ B
  | | A
  | | A
  | | A
  | A

7 | A
  | (A ∧ B) ∨ A

8 | A
  | A ∨ B
  | (A ∨ B) ∧ A

8 | (A ∨ B) ∧ A
  | A
```

```
9 | A→(B→C)
  | | A→B
  | | | A
  | | | 1
  | | | B→C
  | | | 2
  | | | B
  | | | C
  | | A→C
  | (A→B)→(A→C)

9 | (A→B)→(A→C)
  | | A
  | | | B
  | | | A→B D1
  | | | 1
  | | | A→C
  | | | 2
  | | | C
  | | B→C
  | A→(B→C)

10 | A→B
   | | C→A
   | | 1
   | | C→B hyp.sl.
   | (C→A)→(C→B)
```

11 evenzo

```
12 | (A→B)→C
   | | B
   | | A→B D1
   | | 1
   | | C
   | B→C

13 | (A→B)→C
   | | A
   | | | B
   | | | A→B
   | | | 1
   | | | C
   | | B→C
   | A→(B→C)

14 | (A ∨ B)→C
   | | A
   | | A ∨ B
   | | 1
   | | C
   | A→C
   | dgl. B→C
   | (A→C) ∧ (B→C)
```

14 omgekeerd zie A2 ad 17

```
15 | C→(A ∧ B)
   | | C
   | | 1
   | | A ∧ B
   | | A
   | C→A
   | Dgl. C→B; enz.

15 | (C→A) ∧ (C→B)
   | C→A
   | C→B
   | | C
   | | 2
   | | A
   | | 3
   | | B
   | | A ∧ B
   | C→(A ∧ B)

16 | (A→C) ∨ (B→C)
   | | A→C
   | | | A ∧ B
   | | | A
   | | | 2
   | | | C
   | | (A ∧ B)→C
   | | B→C
   | | | A ∧ B
   | | | B
   | | | 3
   | | | C
   | | (A ∧ B)→C
   | (A ∧ B)→C

16 | (A ∧ B)→C
   | | ¬((A→C) ∨ (B→C))
   | | ¬(A→C) 22
   | | ¬(B→C)
   | | A 6
   | | ¬C 6
   | | B
   | | A ∧ B
   | | 1
   | | C
   | ¬¬((A→C) ∨ (B→C))
   | (A→C) ∨ (B→C)

17 | (C→A) ∨ (C→B)
   | | C→A
   | | | C
   | | | 2
   | | | A
   | | | A ∨ B
   | | C→(A ∨ B)
   | | C→B
   | | | C
   | | | 3
   | | | B
   | | | A ∨ B
   | | C→(A ∨ B)
   | C→(A ∨ B)

17 | C→(A ∨ B)
   | | ¬((C→A)∨(C→B))
   | | ¬(C→A) 22
   | | ¬(C→B)
   | | C 6
   | | ¬A 6
   | | ¬B
   | | 1
   | | A ∨ B
   | | B 20
   | ¬¬((C→A)∨(C→B))
   | (C→A) ∨ (C→B)

18 | | A ∧ ¬A
   | | A
   | | ¬A
   | ¬(A ∧ ¬A)
```

```
19 | | ¬(A ∨ ¬A)
   | | ¬A Ock.
   | | ¬¬A Ock.
   | ¬¬(A ∨ ¬A)
   | A ∨ ¬A
```

19 anders:

```
   | | ¬(A ∨ ¬A)
   | | | A
   | | | A ∨ ¬A
   | | | 1
   | | ¬A
   | | A ∨ ¬A
   | ¬¬(A ∨ ¬A)
   | A ∨ ¬A

20 | | ¬(A∨(A→B))
   | | ¬A 22
   | | ¬(A→B)
   | | A 6
   | ¬¬(A∨(A→B))
   | A ∨ (A→B)

21 | | ¬((A→B)∨(B→C))
22 | | ¬(A→B)
   | | ¬(B→C)
   | | ¬B 6
   | | ¬¬B 6
   enz.

5½ | A ∧ (B ∨ C)
   | A
   | B ∨ C
   | | B
   | | 2
   | | A ∧ B
   | | (A ∧ B) ∨ C
   | | C
   | | (A ∧ B) ∨ C
   | (A ∧ B) ∨ C
```

Constructivisten hebben mtp tot hun beschikking: zie A 21. Andersom: stel dat ze de voorkeur geven aan mtp als grondregel in plaats van quodlibet:

```
A
¬A
———
A v B
B  mtp op 2,3
```

Afleiding van de op blz. 5 gegeven formules plus nog andere omtrent + en ↔ . We herhalen even: I $\frac{A,\ \neg B}{A+B}$ II $\frac{\neg A,\ B}{A+B}$ III $\frac{A,\ A+B}{\neg B}$ IV $\frac{\neg A,\ A+B}{B}$

```
V  A ∧ B
   A
   B
     A+B
     2
     ¬B III
     3
   ¬(A+B)

VI ¬A ∧ ¬B
   ¬A
   ¬B
     A+B
     2
     B IV
     3
   ¬(A+B)

A+B
  A ∧ B
  A
  B
  1
  ¬B III
¬(A ∧ B)
  ¬(A v B)
  ¬A 22
  ¬B 22
  1
  B IV
¬¬(A v B)
A v B

¬(A ∧ B)
A v B
  A
  1
  ¬B 14
  A+B I
  B
  1
  ¬A 14
  A+B II
A+B

¬(A+B)
  A
    ¬B
    2
    A+B I
    1
    ¬¬B
    B
A → B
dgl. B→A
A ↔ B

A ↔ B
A → B
B → A
  A+B
    A
    2
    B
    A ∧ B
    ¬(A+B) V
  ¬A
  B IV
  3
  A
¬(A + B)

(A∧¬B)v(¬A∧B)
  A∧¬B
  A
  ¬B
  A+B I
  ¬A∧B
  ¬A
  B
  A+B II
A+B

(A ∧ B)v(¬A∧¬B)
  A∧B
  A
  B
  A→B D1
  B→A D1
  A↔B
  ¬A∧¬B
  ¬A
  ¬B
  A→B 6
  B→A 6
  A ↔ B
A ↔ B

A+A
  A
  1
  ¬A
¬A
A
¬(A+A)
```

Net zo als we van afgeleide regels gebruik mogen maken, is het ook toegestaan om op een plaats in onze afleidingen een zonder aannamen afgeleide formule (zaaf) toe te voegen.

Hebben we behoefte aan afkortingen, dan worden aanbevolen AB voor A ∧ B, A' voor ¬A, AB v CD voor (AB) v (CD), ABC voor (AB)C.

Tenslotte mag men ook meer "algebraisch" te werk gaan , bijv. vrijelijk de "distributieve wetten " (d.i.formules 5 en 6 blz.5) toepassen. Bij de volgende afleidingen is zo maar een keus gedaan.

```
A+B
  ¬(¬A ∧ B)
  A v ¬B
    A
    1
    ¬B
    AB'
    ¬B
    1
    A
    AB'
  AB'
¬(A'B) → AB'
A'B v AB'

A ↔ B
A → B
B → A
A' v B
  A'
  3
  B'
  A'B'
  AB v A'B'
  B
  3
  A
  AB
  AB v A'B'
AB v A'B'

anders:
A v A' zaaf
  A
  2
  B
  enz
  A'
  3
  B'
  enz

A+B
  ¬(B+A)
    A
    1
    ¬B
    B+A
    2
  ¬A
  1
  B
  B+A
¬¬(B+A)
B+A

anders
A v B
¬(A ∧ B)
B v A
¬(B ∧ A)
B+A

A
B
C
  A+B
  1
  ¬B
  2
¬(A+B)
(A+B)+C
B ∧ C
¬(B+C) V
A+(B+C)

A
¬B
¬C
A+B
(A+B)+C
  B+C
  2
  C
  3
¬(B+C)
A+(B+C)
Dgl.met
premissen
A'BC', A'B'C

A+(B+C)
A v A' zaaf
  A
  1
  ¬(B+C)
  B ↔ C
  BC v B'C'
    BC
    B
    C
    (A+B)+C ✲
    B'C'
    B'
    C'
    (A+B)+C ✲
  (A+B)+C
  A'
  1
  B+C
  BC' v B'C
    BC'
    enz
    (A+B)+C ✲
    B'C
    enz
    (A+B)+C ✲
  (A+B)+C
(A+B)+C
✲ zie hiernaast
```

T1) Prem. C→R, (C∧R)→B, (C→B)→¬S, S v T. Bijv.: export van 2 R→(C→B); met 1 en hyp.syl. C→(C→B); hieruit snel C→B; met 3 ¬S; met 4 T. Interpretatie S+T geeft hetzelfde. Interpretatie van 3 als (C∧B)→¬S geeft niet de verlangde conclusie. Premissen van T2) D→W, A v ¬W (of +), ¬(D∧A); van T3) ¬S→C, C→¬D, D v O (of +), ¬O; van T5) C→L, L→B, M→¬B, C ∧ M. T4) A→S, B→F, A v B, S→B, F→W; 1 en 4 geven A→B; met 3 komt B (en dus uiteraard B v W); met 2 en 5 bovendien F en W, zodat men er veel meer uit kan halen. De interpretatie A+B geeft evenwel ¬A,B,F,W,B v W, ¬(B+W) en is dus niet consequent. T6) St.I is ((I ∧ E) ∧ D) → S dus tenslotte I' v E' v D' v S. St.II is E → (¬I v (I ∧ ¬D) v S) met willekeurige haking achter de pijl, dus tenslotte E' v I' v (ID') v S. Het is voldoende om te bezien I' v D' en I' v (ID'). Welnu, vergeten formules blz.5 nr. 7½ ((A∧B)v¬A) → (¬AvB) en ((¬A∧B)vA) → (AvB); omgekeerd klassiek; 8½ ((AvB)∧¬A) → (¬A∧B) en ((¬AvB)∧A) → (A∧B), beide ook omgekeerd. T7) wordt opgevat als geval van "¬A → A dus A", T8 van "A → ¬A dus A", T9 en T10 van "A → B, ¬A → B dus B".

Paardestaarten.

I $\forall x(Px \to Dx)$
$Sab \wedge Pb$
Sab
Pb
1
$Pb \to Db$
Db
$Sab \wedge Db$
$(Sab \wedge Pb) \to (Sab \wedge Db)$
$\forall y((Say \wedge Py) \to (Say \wedge Dy))$
III $\forall x \forall y((Sxy \wedge Py) \to (Sxy \wedge Dy))$
$\exists y(Say \wedge Py)$
c $Sac \wedge Pc$
III
$\forall y((Say \wedge Py) \to (Say \wedge Dy))$
$(Sac \wedge Pc) \to (Sac \wedge Dc)$
$Sac \wedge Dc$
$\exists y(Say \wedge Dy)$
$\exists y(Say \wedge Dy)$
$\exists y(Say \wedge Py) \to \exists y(Say \wedge Dy)$
II $\forall x(\exists y(Sxy \wedge Py) \to \exists y(Sxy \wedge Dy))$

Boom op II.∴.III blijft open:

$\forall x(\exists y(Sxy \wedge Py) \to \exists y(Sxy \wedge Dy))$ bron 1
$\neg \forall x \forall y((Sxy \wedge Py) \to (Sxy \wedge Dy))$ v
$\exists x \neg \forall y((\quad))$ v
$\neg \forall y((Say \wedge Py) \to (Say \wedge Dy))$ v
$\exists y \neg((\quad))$ v
$\neg((Sab \wedge Pb) \to (Sab \wedge Db))$ v
$Sab \wedge Pb$ v
$\neg(Sab \wedge Db)$ v
Sab
Pb

$\neg Sab$ | $\neg Db$
x | $\exists y(Say \wedge Py) \to \exists y(Say \wedge Dy)$ v

$\neg \exists y(Say \wedge Py)$ v | $\exists y(Say \wedge Dy)$ v
$\forall y \neg(\quad)$ | $Sac \wedge Dc$ v
$\neg(Sab \wedge Pb)$ v | Sac
| Dc

$\neg Sab$ | $\neg Pb$
x | x

en nu bron 1 weer gebruiken:
$\exists y(Sby \wedge Py) \to \dots$
$\exists y(Scy \wedge Py) \to \dots$
steeds nieuwe letters.

Equivalentie van III en IV is na loskoppeling van de quantoren zuivere junctorenlogica:

III $\forall x \forall y((Sxy \wedge Py) \to (Sxy \wedge Dy))$
$\forall y((Say \wedge Py) \to (Say \wedge Dy))$
$(Sab \wedge Pb) \to (Sab \wedge Db)$
$Sab \wedge Pb$
3
$Sab \wedge Db$
Db
$(Sab \wedge Pb) \to Db$
$\forall y((Say \wedge Py) \to Dy)$
IV $\forall x \forall y((Sxy \wedge Py) \to Dy)$
$\forall y((Say \wedge Py) \to Dy)$
$(Sab \wedge Pb) \to Db$
$Sab \wedge Pb$
Sab
3
Db
$Sab \wedge Db$
$(Sab \wedge Pb) \to (Sab \wedge Db)$
$\forall y((Say \wedge Py) \to (Say \wedge Dy))$
III $\forall x \forall y((Sxy \wedge Py) \to (Sxy \wedge Dy))$

Hotels.

$\forall x(Hx \to (Dx \wedge Lx))$
$\exists x(Hx \wedge Bx)$
$Hc \wedge Bc$
Hc
Bc
1
$Hc \to (Dc \wedge Lc)$
$Dc \wedge Lc$
Dc
$Dc \wedge Bc$
$\exists x(Dx \wedge Bx)$
$\exists x(Dx \wedge Bx)$

Mastiff zie p.27.

Schilderij.

$\exists x(Sx \quad \forall y(Ky \to Byx))$
Ka
1
c $Sc \wedge \forall y(Ky \to Byc)$
Sc
$\forall y(Ky \to Byc)$
$Ka \to Bac$
2
Bac
$Sc \wedge Bac$
$\exists y(Sy \wedge Bay)$
$\exists y(Sy \wedge Bay)$
$Ka \to \exists y(Sy \wedge Bay)$
$\forall x(Kx \to \exists y(Sy \wedge Bxy))$

Bissagos.

$r \to (t \wedge \forall x(Nx \to \neg Fx))$
$t \to \exists x(Nx \wedge (Fx \vee Ax))$
r
1
$t \wedge \forall x(\dots)$
t
$\forall x(Nx \to \neg Fx)$
2
$\exists x(Nx \wedge (Fx \vee Ax))$
$Nc \wedge (Fc \vee Ac)$
Nc
$Fc \vee Ac$
$Nc \to \neg Fc$
$\neg Fc$
Ac
$Ac \wedge \neg Fc$
$\exists x(Ax \wedge \neg Fx)$
$\exists x(Nx \wedge \neg Fx)$
$r \to \exists x(Nx \wedge \neg Fx)$

Afleiding van de formules uit de quantorenlogica op blz.16 e.v.

We korten af: ∀P voor ∀xPx, ∃P voor ∃xPx. Ook laten we al gauw in een genummerde afleiding de laatste regel weg; hierop behoort te staan de zonder aannamen afgeleide formule met dat nummer.

1 ∀P
1' Pa
∀P → Pa
∀y(∀P → Py)

2 Pa
2' ∃P
Pa → ∃P
∀y(Py → ∃P)

3 ∀P
Pa
∃P

4 ¬∃y(Py→∀P)
Pa → ∀P
∃y(Py→∀P)
1
¬(Pa → ∀P)
Pa
¬∀P
∀P
¬¬∃y(Py → ∀P)
∃y(Py → ∀P)

4 & 5 kunnen wat vlugger bij gebruik maken van 11-14

5 ¬∃y(∃P → Py)
∃P → Pa
∃y(∃P → Py)
1
¬(∃P → Pa)
∃P
¬Pa
∀¬P
Pc
∀¬P
¬Pc
X
X voor X neem
¬¬X ∃y(∃P → Py)
X

Boom bij zaaf ∀y(Py→∀P) enz.:

¬∀y(Py→∀P) v v ¬∀y(∃P → Py)
∃y¬( ) v v ∃y¬( )
¬(Pa → ∀P) v v ¬(∃P → Pa)
Pa v ∃P
¬∀P v Pc
∃¬P v ¬Pa
¬Pb

6 ∀xr
r
∀xr → r
r
∀xr
r → ∀xr
∀xr ↔ r

∃xr
r
r
r
∃xr → r
r
∃xr
r → ∃xr
r ↔ ∃xr

11-14 zie blz.16

15 ∀P
∃¬P
¬Pc
1
Pc
¬∃¬P
¬∃¬P
¬∃¬P

16 ¬∃¬P
¬∀P
∃¬P 14
1
¬¬∀P
∀P

17 ∃P
∀¬P
1
Pc
2
¬Pc
¬∀¬P
¬∀¬P
¬∀¬P

18 ¬∀¬P
¬∃P
∀¬P 12
1
¬¬∃P
∃P

Boom bij omgekeerde van 23:

∃P ∧ ∃Q v
¬∃(P ∧ Q) v
∀¬(P ∧ Q) bron
∃P v
Pa
∃Q v
Qb
¬(Pa ∧ Qa) v
¬(Pb ∧ Qb) v
¬Pa ¬Qa
x
¬Pb ¬Qb
x

21 ∀(P ∧ Q)
Pa ∧ Qa
Pa
∀P
Qa
∀Q
∀P ∧ ∀Q

22 ∀P ∧ ∀Q
∀P
Pa
∀Q
Qa
Pa ∧ Qa
∀(P ∧ Q)

23 ∃(P ∧ Q)
Pc ∧ Qc
Pc
∃P
Qc
∃Q
∃P ∧ ∃Q
∃P ∧ ∃Q

24 ∀P ∧ ∃Q
∀P
∃Q
Qc
2
Pc
Pc ∧ Qc
∃(P ∧ Q)
∃(P ∧ Q)

25 net zo

26 ∃(P ∨ Q)
Pc ∨ Qc
Pc
∃P
∃P ∨ ∃Q
Qc
∃Q
∃P ∨ ∃Q
∃P ∨ ∃Q
∃P ∨ ∃Q

27 ∃P ∨ ∃Q
∃P
Pc
Pc ∨ Qc
∃(P ∨ Q)
∃(P ∨ Q)
∃Q
Qd
Pd ∨ Qd
∃(P ∨ Q)
∃(P ∨ Q)
∃(P ∨ Q)

28 ∀P ∨ ∀Q
∀P
Pa
Pa ∨ Qa
∀(P ∨ Q)
∀Q
Qa
Pa ∨ Qa
∀(P ∨ Q)
∀(P ∨ Q)

Boom bij 28 omgekeerd:

bron ∀(P ∨ Q)
v ¬(∀P ∨ ∀Q)
v ¬∀P
v ¬∀Q
v ∃¬P
v ∃¬Q
¬Pa
¬Qb
v Pa ∨ Qa
v Pb ∨ Qb
Pa Qa
x Pb Qb
x

31 ∀(P ∨ Q)
¬(∀P ∨ ∃Q)
¬∀P
¬∃Q
∃¬P
∀¬Q
¬Pc
1
Pc ∨ Qc
Qc
∀¬Q
¬Qc
∀P ∨ ∃Q
∀P ∨ ∃Q
∀P ∨ ∃Q

anders:

¬Pa
1
Pa ∨ Qa
Qa
∃Q
∀P ∨ ∃Q
2
¬¬Pa
Pa
∀P
∀P ∨ ∃Q

29 en 30 gaan net als 27, maar kunnen ook m.b.v. 3 en junctorenlogica: ∀P → ∃P dus (∀P ∨ ∃Q) → (∃P ∨ ∃Q) enz.

32 net als 31.

Het is dikwijls mogelijk om de afleidingen iets te "versnellen" door gebruik te maken van regels die misschien niet genoemd zijn in hoofdstuk 1, bijv.: Is A → B afgeleid, dan mag ook als afgeleid beschouwd worden (A ∧ C) → (B ∧ C), (A ∨ C) → (B ∨ C), (B → C) → (A → C), (C → A) → (C → B) (voor de laatste twee zie ook nog blz.15 onderaan). Verder: is uit Pa afgeleid (desnoods alleen met behulp van junctorenlogica, om veilig te staan) Qa, dan kan uit ∀xPx resp. ∃xPx worden afgeleid ∀xQx resp. ∃xQx. (Zelf doen! We zullen deze versnellingen aangeven door puntjes. Wel moet worden opgemerkt, dat we op deze manier vaak een "constructieve" afleiding vervangen door een "klassieke".

```
33 | ∀(P → Q)          anders:
   | | ∀P              ...
   | | Pa              ∀(¬P ∨ Q)
   | | 1               ∃¬P ∨ ∀Q 32
   | | Pa → Qa         ...
   | | Qa              ¬∀P ∨ ∀Q
   | | ∀Q              ∀P → ∀Q
   | ∀P → ∀Q

35 | ∀(P → Q)          anders:
   | | ∃P              ...
   | | | Pc            ∀(¬P ∨ Q)
   | | | 1             ∀¬P ∨ ∃Q 31
   | | | Pc → Qc       ...
   | | | Qc            ¬∃P ∨ ∃Q
   | | | ∃Q            ∃P → ∃Q
   | | ∃Q
   | ∃P → ∃Q

36 | ∃(P → Q)          anders:
   | | ∀P              ...
   | | 1               ∃(¬P ∨ Q)
   | | | Pc→Qc         ∃¬P ∨ ∃Q 26
   | | | 2             ...
   | | | Pc            ¬∀P ∨ ∃Q
   | | | Qc            ∀P → ∃Q
   | | | ∃Q
   | | ∃Q
   | ∀P → ∃Q

37 | ∃P → ∀Q           anders:
   | | Pa              ¬∃P ∨ ∀Q
   | | | ∃P            ...
   | | | 1             ∀¬P ∨ ∀Q
   | | | ∀Q            ∀(¬P ∨ Q) 28
   | | | Qa            ...
   | | Pa → Qa         ∀(P → Q)
   | ∀(P → Q)

38 en 39 net als 40

40 versneld:
   | ∀P → ∃Q
   | ¬∀P ∨ ∃Q
   | ...
   | ∃(¬P ∨ Q) 26
   | ...
   | ∃(P → Q)

40 | ∀P → ∃Q
   | | ¬∃(P → Q)
   | | ∀¬(P → Q) 12
   | | ¬(Pa → Qa)
   | | Pa
   | | ¬Qa
   | | ∀P
   | | ∀¬Q
   | | ¬∃Q 11
   | | 1
   | | ∃Q
   | ¬¬∃(P → Q)
   | ∃(P → Q)

anders:
   | | ¬∃(P → Q)
   | | | ∀P
   | | | 1
   | | | ∃Q
   | | | | Qc
   | | | | Pc→Qc D1
   | | | | ∃(P → Q)
   | | | ∃(P → Q)
   | | | 2
   | | ¬∀P
   | | ∃¬P
   | | | ¬Pd
   | | | Pd→Qd Duns
   | | | ∃(P → Q)
   | | ∃(P → Q)
   | ¬¬∃(P → Q)
   | ∃(P → Q)

anders (analoog blz.14):
   | ¬∃(P → Q)
   | ∀¬(P → Q)
   | 1
   | ¬∀P ∨ ∃Q
   | | ¬∀P                 | ∃Q
   | | ∃¬P                 | | Qd
   | | | ¬Pc               | | 3
   | | | 3                 | | ¬(Pd→Qd)
   | | | ¬(Pc→Qc)          | | ¬Qd
   | | | Pc                | | X
   | | | X                 | X
   | | X
   | X                     Neem voor X
   | ¬¬X                   ∃(P → Q)
   | X
```

Op blz.18 had nog wel duidelijk gezegd kunnen worden dat er a.h.w. nog een pijl van links naar rechts op elke regel druks kan lopen; wegens 3 ∀x... → ∃x...

De formules 41-56 kunnen ook met behulp van 6 en 21-32 worden afgeleid; ook hier kan een klassieke afleiding in plaats van een constructieve optreden.

```
41 | ∀(r ∧ P)          anders:
   | | r ∧ Pa          ∀r ∧ ∀P 21
   | | r               ∀r
   | | Pa              r 6
   | ∀P                ∀P
42 | r ∧ ∀P            r ∧ ∀P
   | r                 r
   | ∀P                ∀r 6
   | | Pa              ∀P
   | | r ∧ Pa          ∀r ∧ ∀P
41 | ∀(r ∧ P)          ∀(r ∧ P) 22

43 | ∃(r ∧ P)          anders:
   | | r ∧ Pc          ∃r ∧ ∃P 23
   | | r               ∃r
   | | Pc              r 6
   | | ∃P              ∃P
   | | r ∧ ∃P          r ∧ ∃P
44 | r ∧ ∃P
   | r                 r
   | ∃P                ∀r !!6
   | | Pc              ∃P
   | | 2               ∀r ∧ ∃P
   | | r ∧ Pc          ∃(r ∧ P) 24
   | ∃(r ∧ P)
43 | ∃(r ∧ P)

45 | ∀(r ∨ P)          anders:
   | | ¬(r ∨ ∀P)       ...
   | | ¬r              ∀(¬r → P)
   | | ¬∀P             ∀¬r → ∀P 33
   | | 1               ...
   | | r ∨ Pa          ¬r → ∀P
   | | Pa mtp          ...
   | | ∀P              r ∨ ∀P
   | ¬¬(r ∨ ∀P)
46 | r ∨ ∀P
   | | r               ...
   | | r ∨ Pa          ∀r ∨ ∀P
   |                   ∀(r ∨ P) 2?
   | | ∀P
   | | Pa
   | | r ∨ Pa
   | r ∨ Pa
45 | ∀(r ∨ P)
```

```
47 ∃(r ∨ P)            anders:
   | r ∨ Pc            ∃r ∨ ∃P 26
   | | r               ...
   | | r ∨ ∃P          r ∨ ∃P
   | | Pc
   | | ∃P
   | | r ∨ ∃P
   | r ∨ ∃P
48 r ∨ ∃P              ...
   | r                 ∃r ∨ ∃P
   | r ∨ Pa            ∃(r ∨ P) 27
   | ∃(r ∨ P)
   | ∃P
   | | Pc
   | | r ∨ Pc
   | | ∃(r ∨ P)
   | ∃(r ∨ P)
47 ∃(r ∨ P)
```

```
49 ∀(r → P)            anders:
   | r                 ...
   | 1                 ∀(¬r ∨ P)
   | r → Pa            ¬r ∨ ∀P 45
   | Pa                r → ∀P
   | ∀P
50 r → ∀P
   | r                 ¬r ∨ ∀P
   | 1                 ...
   | ∀P                ∀¬r ∨ ∀P
   | Pa                ∀(¬r ∨ P) 28
   | r → Pa            ...
49 ∀(r → P)            ∀(r → P)
```

```
51 ∃(r → P)            anders:
   | r                 ...
   | 1                 ∃(¬r ∨ P)
   | | r → Pc          ¬r ∨ ∃P 47
   | | 2               ...
   | | Pc              r → ∃P
   | | ∃P
   | ∃P
52 r → ∃P
   | ¬∃(r → P)         ¬r ∨ ∃P
   | ∀¬(r → P)         ∃(¬r ∨ P) 48
   | ¬(r → Pa)         ...
   | r                 ∃(r → P)
   | ¬Pa
   | ∀¬P
   | ¬∃P
   | 1
   | ∃P
   | ¬¬∃(r → P)
51 ∃(r → P)
```

```
53 ∀(P → r)            anders:
   | ∃P                ...
   | | Pc              ∀(r ∨ ¬P)
   | | 1               r ∨ ∀¬P 45
   | | Pc → r          ...
   | | r               r ∨ ¬∃P
   | r                 ...
54 ∃P → r              ∃P → r
   | Pa                ¬∃P ∨ r
   | ∃P                ...
   | 1                 r ∨ ∀¬P
   | r                 ∀(r ∨ ¬P) 46
   Pa → r              ...
53 ∀(P → r)            ∀(P → r)
```

```
55 ∃(P → r)            anders:
   | ∀P                ...
   | 1                 ∃(r ∨ ¬P)
   |   Pc → r          r ∨ ∃¬P 47
   |   2               ...
   |   Pc              r ∨ ¬∀P
   |   r               ...
   | r                 ∀P → r
56 ∀P → r
   | ¬∃(P → r)         ¬∀P ∨ r
   | ∀¬(P → r)         ...
   | ¬(Pa → r)         r ∨ ∃¬P
   | Pa                ∃(r ∨ ¬P) 48
   | ∀P                ...
   | ¬r                ∃(P → r)
   | 1
   | ¬∀P mtt
   | ¬¬∃(P → r)
55 ∃(P → r)
```

```
57 ∀(P → r)            anders:
   | ∀P                ∃P → r 53
   | Pa                ∀P → ∃P zaaf 3
   | 1                 ∀P → r
   | Pa → r
   | r
   ∀P → r
```

Boom bij 57-omgekeerd:

```
     ∀P → r          v
    ¬∀(P → r)        v
    ∃¬(       )      v
    ¬(Pa → r)        v
        Pa
        ¬r
      /     \
¬∀P   v      r
∃¬P   v      x
¬Pb
```

```
58 ∃P → r              anders:
   | ¬∃(P → r)         ¬∃P ∨ r
   | ∀¬(P → r)         ...
   | ¬(Pa → r)         r ∨ ∀¬P
   | Pa                ∀(r ∨ ¬P) 46
   | ¬r                ...
   | ∃P                ∀(P → r)
   | 1                 ∃(P → r) 3
   | r                 Korter:
   ¬¬∃(P → r)          ∀(P → r) 54
   ∃(P → r)            ∃(P → r) 3
```

Boom bij 58-omgekeerd:

```
   ∃(P → r)     v
  ¬(∃P → r)     v
     ∃P         v
     ¬r
     Pa
   Pb → r       v
   /     \
 ¬Pb      r
          x
```

De mastiff van blz.13 nr.5. Men moet herkennen: type van I is ∀(M → (r → A)), van II: ∀(r → (M → A)); dat wordt na loskoppeling commutatie (blz.3). Anderzijds is II van type ∀(r → P), IV: r → ∀P; deze zijn equivalent volgens 49,50. Wat II en III betreft: het stuk achter de eerste quantor is ∀yPy → Mx resp. ∃y(Qy → Px); deze gedeelten (na vervanging van x door a) zijn equivalent volgens 55,56, en daarna komt de equivalentie van II en III zelf (vergelijk A 7 bovenaan).

In de figuur van Kuratowski op blz.18 zit meer dan in de formules 61-65 is aangegeven; men vindt bijv. onderaan nog ∃y∀xRxy → ∀x∃yRxy van type ∃,∀'R', → ∀,∃'R,', en dat is anders dan 62 die van type ∃,∀'R,' → ∀,∃'R', is. Men kan die nieuwe formule 62' afzonderlijk afleiden, maar ook zo te werk gaan: schrijf Syx voor Rxy (die letters overal in Rxy verwisselen) en pas dan 62 toe op S i.p.v. R.

```
61 | ∀x∀yRxy
   | ∀yRay
   | Rab
   | ∀xRxb
   | ∀y∀xRxy
omgekeerd
net zo

62 | ∃x∀yRxy
   |  c | ∀yRcy
   |    | Rca
   |    | ∃xRxa
   | ∃xRxa
   | ∀y∃xRxy

63 | ∃x∃yRxy
   |  c | ∃yRcy
   |    |  d | Rcd
   |    |    | ∃xRxd
   |    |    | ∃y∃xRxy
   |    | ∃y∃xRxy
   | ∃y∃xRxy

64 | ∀x∀yRxy
   | ∀yRay
   | Raa
   | ∀xRxx

65 | ∃xRxx
   | Rcc
   | ∃yRcy
   | ∃x∃yRxy
   | ∃x∃yRxy
```

Boom op 62-omgekeerd:

```
∀y∃xRxy bron 1
¬∃x∀yRxy  v
∀x¬∀yRxy bron 2
∃xRxa v uit 1
 Rba
¬∀yRby v uit 2
∃y¬Rby v
 ¬Rbc
... Bron 1 en 2 op b en c toepassen; enz.
```

```
66 | ∀x∀y¬Rxy
   |   | ∃x∃yRxy noem X
   |   |  a | ∃yRay
   |   |    |  b | Rab
   |   |    |    | 1
   |   |    |    | ∀y¬Ray
   |   |    |    | ¬Rab
   |   |    |    | ¬X
   |   |    | ¬X
   |   | ¬X

anders
"van binnen uit"
∀y¬Ray
¬∃yRay 11
∀x¬∃yRxy
¬∃x∃yRxy 11

67 | ¬∃x∃yRxy
   |   | Rab
   |   | ∃yRay
   |   | ∃x∃yRxy
   |   | 1
   | ¬Rab
   | ∀y¬Ray
66 | ∀x∀y¬Rxy

anders:
∀x¬∃yRxy
¬∃yRay
∀y¬Ray
∀x∀y¬Rxy
```

```
68 | ∃x∃y¬Rxy
   |   | ∀x∀yRxy (X)
   |   | 1
   |   |  a | ∃y¬Ray
   |   |    |  b | ¬Rab
   |   |    |    | 2
   |   |    |    | ∀yRay
   |   |    |    | Rab
   |   |    |    | ¬X
   |   |    | ¬X
   |   | ¬X

anders:
c | ∃y¬Rcy
  | ¬∀yRcy
  | ∃x¬∀yRxy
∃x¬∀yRxy
¬∀x∀yRxy

69 | ¬∀x∀yRxy
   | ∃x¬∀yRxy
   |  c | ¬∀yRcy
   |    | ∃y¬Rcy
   |    |  d | ¬Rcd
   |    |    | ∃y¬Rcy
   |    | ∃y¬Rcy
   | ∃x∃y¬Rxy
68 | ∃x∃y¬Rxy

anders:
∃x∃y¬Rxy
en deze
kan meteen
eruit
```

```
72 | ∃x∀y¬Rxy
   |   | ∀x∃yRxy (X)
   |   | 1
   |   |  c | ∀y¬Rcy
   |   |    | 2
   |   |    | ∃yRcy
   |   |    |  d | Rcd
   |   |    |    | ∀y¬Rcy
   |   |    |    | ¬Rcd
   |   |    |    | ¬X
   |   |    | ¬X
   |   | ¬X
73 | ¬∀x∃yRxy
   | ∃x¬∃yRxy
   |   | ¬∃yRcy
   |   | ∀y¬Rcy
   |   | ∃x∀y¬Rxy
72 | ∃x∀y¬Rxy

anders:
| ∀y¬Rcy
| ¬∃yRcy
| ∃x¬∃yRxy
∃x¬∃yRxy
¬∀x∃yRxy

70 | ∀x∃y¬Rxy
   |   | ∃x∀yRxy (X)
   |   |   | ∀yRcy
   |   |   | 1
   |   |   | ∃y¬Rcy
   |   |   | ¬∀yRcy
   |   |   | ¬X
   |   | ¬X
71 | ¬∃x∀yRxy
   | ∀x¬∀yRxy
   | ¬∀yRay
   | ∃y¬Ray
70 | ∀x∃y¬Rxy

anders:
∃y¬Ray
¬∀yRay
∀x¬∀yRxy
¬∃x∀yRxy
```

```
77 | ∀y∃x(Px ∨ Qy)
   |   | ¬(∃P ∨ ∀Q)
   |   | ¬∃P
   |   | ¬∀Q
   |   | 1
   |   | ∃x(Px ∨ Qa)
   |   | ∃P ∨ Qa  47
   |   | Qa mtp
   |   | ∀Q
   | ¬¬(∃P ∨ ∀Q)
   | ∃P ∨ ∀Q

78 | ∀P → ∀Q
   |   | ¬∃x∀y(Px→Qy)
   |   | ∀x¬∀y(Px→Qy)
   |   | ¬∀y(Pa → Qy)
   |   | ∃y¬(Pa → Qy)
   |   |  c | ¬(Pa→Qc)
   |   |    | Pa
   |   |    | ¬Qc
   |   |    | ∃¬Q
   |   | Pa
   |   | ∃¬Q
   |   | ∀P
   |   | ¬∀Q
   |   | 1
   |   | ∀Q
   | ¬¬∃x∀y(Px→Qy)
   | ∃x∀y(Px → Qy)
```

```
74 | ∃P ∧ ∀Q
   | ∃P
   | ∀Q
   |  c | Pc
   |    | ∀Q
   |    | Qa
   |    | Pc ∧ Qa
   |    | ∀y(Pc ∧ Qy)
   |    | ∃x∀y(Px ∧ Qy)
   | ∃x∀y(Px ∧ Qy)

75 | ∀y∃x(Px ∧ Qy)
   | ∃x(Px ∧ Qa)
   | ∃P ∧ Qa  .43
   | ∃P
   | Qa
   | ∀Q
   | ∃P ∧ ∀Q

76 | ∃P ∨ ∀Q
   |   | ∃P
   |   |  c | Pc
   |   |    | Pc ∨ Qa
   |   |    | ∀y(Pc ∨ Qy)
   |   |    | ∃x∀y(Px ∨ Qy)
   |   | ∃x∀y(Px ∨ Qy)
   |
   |   | ∀Q
   |   | Qa
   |   | Pb ∨ Qa
   |   | ∀y(Pb ∨ Qy)
   |   | ∃x∀y(Px ∨ Qy)
   | ∃x∀y(Px ∨ Qy)
```

79-85 geven geen enkele moeilijkheid (80,85 klassiek).

Beperkte quantoren.

$\forall P$
Ua
1
Pa
$Ua \to Pa$
$\forall x(Ux \to Px)$
$\forall_U P$

$\exists_U P$
$Uc \wedge Pc$
Pc
$\exists P$
$\exists P$

Ua
$\forall_U P$
$Ua \to Pa$
1
Pa
$\forall_U P \to Pa$
1U $Ua \to (\forall_U P \to Pa)$
1'U $\forall_U y(\forall_U P \to Py)$

$\exists U$
Uc
$\forall_U P$
$Uc \to Pc$
2
Pc
$\forall_U P \to Pc$
$Uc \wedge (\forall_U P \to Pc)$
$\exists y(Uy \wedge (\forall_U P \to Py))$
$\exists_U y(\forall_U P \to Py)$
1"U $\exists U \to \exists_U y(\forall_U P \to Py)$

Zelf doen:

2U $Ua \to (Pa \to \exists_U P)$

2'U $\forall_U y(Py \to \exists_U P)$

2"U $\exists U \to$
$\exists_U y(Py \to \exists_U P)$

1"U kan korter met 3U:
$\exists U \wedge \forall_U y(..) \to$
$\exists_U y(..)$

$\exists U$
$\forall_U P$
1
Uc
2
$Uc \to Pc$
Pc
$Uc \wedge Pc$
$\exists (U \wedge P)$
$\exists_U P$
$\forall_U P \to \exists_U P$
3U $\exists U \to (\forall_U P \to \exists_U P)$

Bomen bij 4 (vgl.5) blijven open:

$\neg \exists_U y(Py \to \forall_U P)$
$\neg \exists y(Uy \wedge (Py \to \forall_U P))$
$\forall y \neg (\qquad)$
$\neg (Ua \wedge (Pa \to \forall_U P))$
$\neg Ua \qquad ...$

Ook bij $\neg(\exists U \to \exists_U y(..))$
$\exists U$
Uc
$\neg \exists_U y(..)$
enz.

$\exists U$
$\forall (U \to r)$
1
Uc
2
$Uc \to r$
r
r
$\forall_U r \to r$
6U $\exists U \to (\forall_U r \to r)$

6U: $\exists_U r \to r$ en $r \to \forall_U r$
(en dus $\exists_U r \to \forall_U r$) zelf doen;
met D1 komt dan ook
$\exists U \to (\exists_U r \to r)$ enz.
Voor de andere stukken van 6 moet "$\exists U \to$ " geplaatst worden:
$\exists U \to (r \to \exists_U r)$ zelf doen;

Met $\forall_U$, $\exists_U$ voor resp. $\forall$, $\exists$ gaan
11-18, 21-28, 31-33, 35-37, 40, 42-47, 49-51, 53-55, 61-73
waarvan klassiek 14,16,18,31,32, 40,45,69,71,73.

Bij 29,30,34,38,39,41,48,52,56-58 blijven de bomen open; na voorplaatsen van "$\exists U \to$ " worden ze afleidbaar (38,39,52,56,58 klassiek)

d.i. 29U is $\exists U \to ((\forall_U P \vee \exists_U Q) \to \exists_U (P \vee Q))$

enz. 74-85 blijven vraagstukken zonder uitwerking.

Precies één:

I $\exists P \wedge \forall yz(Py \wedge Pz \to y=z)$
$\exists P$
$\forall yz(...)$
Pc
3
$\forall z(Pc \wedge Pz \to c=z)$
$Pc \wedge \forall z(\quad ,, \quad)$
$\exists x(Px \wedge \forall z(Px \wedge Pz \to x=z))$
II $\exists x(Px \wedge \forall z(Px \wedge Pz \to x=z))$
$Pc \wedge \forall z(Pc \; ..)$
Pc
$\forall z(Pc \wedge Pz \to c=z)$
$a=c$
Pc
Pa
$a=c \to Pa$
Pa
Pc
$Pc \wedge Pa$
$\forall z(Pc \wedge Pz \to c=z)$
$Pc \wedge Pa \to c=a$
$c=a$
$c=c$
$a=c$
$Pa \to a=c$
$Pa \leftrightarrow a=c$
$\forall y(Py \leftrightarrow y=c)$
$\exists x\forall y(Py \leftrightarrow y=x)$
III $\exists x\forall y(Py \leftrightarrow y=x)$
$\forall y(Py \leftrightarrow y=c)$
$Pc \leftrightarrow c=c$
$c=c \to Pc$
$c=c$ zaaf
Pc
$\exists P$
$Pa \wedge Pb$
Pa
Pb
$\forall y(Py \leftrightarrow y=c)$
$Pa \leftrightarrow a=c$
$Pb \leftrightarrow b=c$
$Pa \to a=c$
$a=c$
$Pb \to b=c$
$b=c$
$a=b$
$Pa \wedge Pb \to a=b$
$\exists P$
$Pa \wedge Pb \to a=b$
$\forall z(Pa \wedge Pz \to a=z)$
$\forall y\forall z(Py \wedge Pz \to y=z)$
I $\exists P \wedge \forall yz(Py \wedge Pz \to y=z)$

Merk op dat II equivalent is met

$\exists_P x \forall_P y(Px \to x=y)$

Technische Hogeschool Delft
Onderafdeling der
wiskunde en informatica

INLEIDING MATHEMATISCHE LOGICA (a127 C)
woensdag 19 mei 1982
9 - 12 uur

1. Bewijs in het systeem van Fitch de onderstaande formules.

   a. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

   b. $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$.

2. Zij gegeven de formule F: $[(\neg A \vee B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow \neg[A \wedge \neg C]$.

   a. Laat door middel van de zg. boommethode zien dat $\models F$.

   b. Construeer door middel van de onder a gevonden boom een volledig bewijs van F in het systeem van Fitch.

3. De zg. Sheffer stroke / is gedefinieerd door: A/B is waar dan en slechts dan als A en B niet beide waar zijn.
   Druk $\vee, \neg, \wedge$ en $\rightarrow$ uit in de Sheffer stroke (dat wil zeggen probeer formules, waarin als enige connectief voorkomt de Sheffer stroke, te vinden die resp. equivalent zijn met $A \vee B, \neg A, A \wedge B$ etc.).

4. Bepaal een welgevormde formule F uit de propositielogica waarin uitsluitend de propositievariabelen A,B en C voorkomen en die bovendien voldoet aan de bijgaande waarheidstabel.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

5. F, G en H zijn welgevormde formules uit de propositielogica.

   a. Bewijs de volgende metastelling:

   $$F, G \models H \quad \text{dan en slechts dan als} \quad \models F \rightarrow (G \rightarrow H).$$

   b. Geldt voor het systeem van Fitch ook:

   $$F, G \vdash H \quad \text{dan en slechts dan als} \quad \vdash F \rightarrow (G \rightarrow H).$$

   Licht Uw antwoord toe.

ZIE VOLGENDE BLAD !!

6. Gegeven zijn de volgende formules. Als een formule afleidbaar is, geef dan een afleiding in het systeem van Fitch, als dit niet het geval is geef dan een tegenvoorbeeld.

   a. $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x P(x,y)$.

   b. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow [\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)]$.

   c. $\forall x \neg P(x) \leftrightarrow \neg \exists x P(x)$.

   d. $\exists x \neg P(x) \leftrightarrow \neg \forall x P(x)$.

7. Toon aan dat de volgende redeneringen korrekt zijn.

   a. Iedere student is leergierig. Jan is niet leergierig. Dus Jan is geen student.

   b. Sommige patiënten houden van alle specialisten. Geen enkele patiënt houdt van een kwakzalver. Dus geen enkele specialist is een kwakzalver.

8. Bewijs in het systeem van Fitch de volgende eigenschappen van de gelijkheid (reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit).

   a. $\forall x(x=x)$.

   b. $\forall x \forall y[(x=y) \rightarrow (y=x)]$.

   c. $\forall x \forall y \forall z[(x=y) \wedge (y=z) . \rightarrow . (x=z)]$.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Technische Hogeschool Delft
Onderafdeling der
Wiskunde en informatica

INLEIDING MATHEMATISCHE LOGICA (a 127C)
vrijdag 13 augustus 1982
14 - 17 uur

1. Bewijs in het systeem van Fitch de volgende formules (propositielogica).

a. $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$.

b. $(A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

c. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.

2. F en G zijn willekeurige formules uit de propositielogica en $\ast$ is een voegteken of logische operatie dat gedefiniëerd is door: $F \ast G$ is equivalent met $\neg(F \vee G)$.
Druk $\neg F$, $F \vee G$, $F \wedge G$ en $F \rightarrow G$ uit in zo eenvoudig mogelijke formules die hiermede equivalent zijn en alleen de steroperatie bevatten.

3. F en G zijn willekeurige formules uit de propositielogica. Bewijs van de navolgende beweringen de juistheid of de onjuistheid.

a. Als $\models (F \wedge G)$ dan $\models F$ èn $\models G$.

b. Als $\models F$ dan $\models \neg F$.

c. Als $\models (F \rightarrow G)$ dan $\models F$ èn $\models G$.

d. Als $\models F$ èn $\models G$ dan $\models (F \rightarrow G)$

4. Gegeven is de formule F: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D) . \rightarrow . (A \rightarrow D)$.

a. Toon aan door middel van de boommethode dat $\models F$.

b. Construeer door middel van de onder a gevonden boom een bewijs van F in het systeem van Fitch.

5. Ga na of de navolgende redenering correct is. Het antwoord moet van een een bewijs zijn voorzien.

Het is een bekend feit dat als een mens geen troglodiet is, dan is hij niet frabig; men erkent ook algemeen dat alleen als iemand geen essentialist is, hij suprapuntaal kan zijn, Niemand kan natuurlijk en troglodiet en fijnig zijn, en men moet ôf essentialist ôf frabig zijn, ôf beide. Hieruit volgt dat Dorknoper, die zonder twijfel suprapuntaal is, niet eveneens fijnig kan zijn (O.B. Bommel).

ZIE VOLGENDE BLAD!

6. Gegeven zijn de volgende formules. Als de formule afleidbaar is geef dan een afleiding in het systeem van Fitch, als dit niet het geval is geef dan een tegenvoorbeeld.

a. $\exists x \forall y \neg P(x,y) \vee \exists y \forall x\ P(x,y)$.

b. $\forall x\ R(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg R(x)$.

c. $(\forall x P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)) \rightarrow \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

d $\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x)) \rightarrow (\exists xA(x) \leftrightarrow \exists xB(x))$.

7. Toon door middel van de boommethode aan dat $\models A1 \rightarrow (A2 \rightarrow X)$. De formules A1, A2 en X zijn gegeven door:

A1: $\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x))$, A2: $\exists x(B(x) \wedge C(x))$ en X: $\exists x(C(x) \wedge \neg A(x))$.

8. Bewijs dat $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) . \rightarrow . x = y))$ een geldig gevolg is van $\forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) . \rightarrow . x = y)$ en $\exists xP(x)$.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
Onderafdeling der
Wiskunde en Informatica

INLEIDING MATHEMATISCHE LOGICA (a 127 C)
dinsdag 18 januari 1983
14 - 17 uur

1. Bewijs onderstaande formules in het systeem van Fitch.

   a. $(A\to B)\to(\neg A\to B.\to.B)$.

   b. $(A\to B)\vee(B\to C)$.

   c. $\neg(A\vee B)\leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)$.

   d. $\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)$.

2. A,B en C zijn willekeurige formules uit de propositielogica, P(x) en Q(x) zijn willekeurige formules met vrije variabele x.
   Toon van onderstaande beweringen de juistheid of de onjuistheid aan.

   a. Als $A,B\models C$ dan $\vdash(A\wedge B)\to C$.

   b. Als $\models(A\vee B)$ dan $\models A\wedge\neg B$ ōf $\models\neg A\wedge B$.

   c. Als $\models\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ dan $\models\forall xP(x)$ ēn $\models\exists xQ(x)$.

   d. $\models\exists x(P(x)\vee Q(x))$ dan en slechts dan als $\models\exists xP(x)$ ēn $\models\exists xQ(x)$.

3. Toon aan dat onderstaande redenering juist is (in het systeem van Fitch).
   Als het blijft stormen dan zal het waterpeil van de Schelde stijgen.
   Als het blijft stormen en het waterpeil van de Schelde stijgt dan wordt de brug beschadigd.
   Als de brug beschadigd wordt dan is verkeerscapaciteit van de rijksweg te klein.
   Of de capaciteit van de rijksweg is voldoende of Rijkswaterstaat heeft een fout gemaakt, maar niet beide.
   Dus Rijkswaterstaat heeft een fout gemaakt.

4. A, $\forall xB(x)$ en C zijn formules zonder vrije variabelen waarin de naam p niet voorkomt.

   a. Bewijs dat uit $A\vdash\neg\forall xB(x)$ en $A,\neg B(p)\vdash C$ volgt $A\vdash C$.

   b. Toon aan dat het onder a gestelde niet juist is als de naam p voorkomt in de formule A.

ZIE OOK DE OPGAVEN 5,6 en 7!

5. Gegeven zijn de formules P1, P2 en C.

P1 $\forall x \forall y (R(x) \wedge R(y) .\rightarrow. \; x=y)$,

P2 $\neg \forall x \neg R(x)$,

C $\exists x (R(x) \wedge \forall y (\neg R(y) .\vee. \; x=y))$.

Bewijs dat de formule $(P1 \wedge P2) \rightarrow C$ afleidbaar is in het systeem van Fitch.

6. Zij gegeven de volgende redenering.
Alle Nederlanders zijn mensen. Alle mensen zijn feilbaar. Van Agt is een Nederlander. Dus niet alle Nederlanders zijn onfeilbaar.

a. Toon door middel van de boommethode aan dat de redenering juist is.

b. Transformeer de onder a verkregen boom in een redenering in het systeem van Fitch.

7. Bewijs de juistheid van de onderstaande redenering in het systeem van Fitch.
People are prejudiced against anyone who is liked by someone they dislike. But nobody is prejudiced against himself. So people don't like anyone who dislikes them.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Uitwerking opgaven Tentamen "Inleiding Mathematische Logica" (a 127 C
van 18 januari 1983.

1. Bewijs onderstaande formules in het systeem van Fitch
 a. $(A \to B) \to (\neg A \to B . \to . B)$, b. $(A \to B) \vee (B \to C)$,
 c. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$, d. $\neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$.

a.
1 $\mid A \to B$
2 $\mid \quad \mid \neg A \to B$
$\mid \quad \mid A \vee \neg A$ (0)
$\mid \quad \mid \quad \mid A \qquad\qquad \mid \neg A$
$\mid \quad \mid \quad \mid B\ (1) \qquad \mid B\ (2)$
$\mid \quad \mid B$
$\mid \neg A \to B . \to . B$
$(A \to B) \to (\neg A \to B . \to . B)$

(0)
$\mid \neg(A \vee \neg A)$
$\mid \quad \mid A$
$\mid \quad \mid A \vee \neg A$
$\mid \quad \mid \neg(A \vee \neg A)$ (1)
$\mid \neg A$
$\mid A \vee \neg A$
$\mid \neg(A \vee \neg A)$ (1)
$\neg\neg(A \vee \neg A)$
$A \vee \neg A$

b. $B \vee \neg B$ (0')
$\mid B$
$\mid A \to B$ (1)
$\mid (A \to B) \vee (B \to C)$

$\mid \neg B$
$\mid \neg C \to \neg B$ (2)
$\mid B \to C$ (3)
$\mid (A \to B) \vee (B \to C)$

$(A \to B) \vee (B \to C)$

(0') als (0) met B i.p

(1)
1 $\mid B$
$\mid \quad \mid A$
$\mid \quad \mid B\ (1)$
$\mid A \to B$

(2) als (1) met $\neg B$ i.p.v. B
en $\neg C$ i.p.v. A

(3)
1 $\mid \neg C \to \neg B$
2 $\mid \quad \mid B$
$\mid \quad \mid \quad \mid \neg C$
$\mid \quad \mid \quad \mid \neg B$ (1)
$\mid \quad \mid \quad \mid B$ (2)
$\mid \quad \mid \neg\neg C$
$\mid \quad \mid C$
$\mid B \to C$

c.
1 $\mid \neg(A \vee B)$
$\mid \quad \mid A$
$\mid \quad \mid A \vee B$
$\mid \quad \mid \neg(A \vee B)$ (1)
$\mid \neg A$
$\mid \quad \mid B$
$\mid \quad \mid A \vee B$
$\mid \quad \mid \neg(A \vee B)$ (1)
$\mid \neg B$
$\mid \neg A \wedge \neg B$
2 $\neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$

(vervolg op p. 2)

| $\neg A \wedge \neg B$
3 | $\neg A$
4 | $\neg B$
5 | | $A \vee B$
| | | A
| | | $\neg A$ (3) ④
| | | X
| | | B
| | | $\neg B$ (4) ⑤
| | | X
| | $X = \neg(A \vee B)$
| | $A \vee B$ (5)
| $\neg A \vee B$

6 $(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \vee B)$

(2 + 6)

$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

④ $A \wedge \neg A . \rightarrow . X$

⑤ $B \wedge \neg B . \rightarrow . X$

Ad ④ en ⑤:

1 | $A \wedge \neg A$
| | $\neg X$
| | A (1)
| | $\neg A$ (1)
| $\neg\neg X$
| X

$A \wedge \neg A . \rightarrow . X$

d. 1 | $\neg(A \rightarrow B)$
| | $\neg A$
| | $\neg B \rightarrow \neg A$ ⑥
| | $A \rightarrow B$ ⑦
| | $\neg(A \rightarrow B)$ (1)
| $\neg\neg A$
| A
| | B
| | $A \rightarrow B$ ①
| | $\neg(A \rightarrow B)$ (1)
| $\neg B$
| $A \wedge \neg B$

$\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$

⑥ als ① met $\neg A$ i.p.v. B en $\neg B$ i.p.v. A

⑦ als ③ met A i.p.v. B en B i.p.v. C

// In deze opgave worden bewijzen gevraagd, waarin alleen elementaire afleidingsstappen gebruikt mogen worden. Veel voorkomende fouten vloeien voort uit het gebruik van te grote stappen (aangegeven met *) zoals:

(α) niet-elementaire stappen zonder bewijs; b.v. het weglaten van de deelbewijzen ⓪, ①, ..., ⑦; of

(β) niet-elementaire stappen, die (bijna) even krachtig zijn als de te bewijzen formule.

Voorbeelden:

$\underline{d}$.

$$\begin{array}{l|ll}
 & \neg(A\to B) & \\ \hline
 & \neg(\neg A\vee B) & * \\
 & \neg\neg A\wedge\neg B & * \\
 & A\wedge\neg B & \\
\multicolumn{3}{l}{\neg(A\to B)\to(A\wedge\neg B)}
\end{array}$$

$\underline{b}$.

$$\begin{array}{l|ll}
 & \neg((A\to B)\vee(B\to C)) & \\ \hline
 & \neg(A\to B)\wedge\neg(B\to C) & * \\
 & \neg(\neg A\vee B)\wedge\neg(\neg B\vee C) & * \\
 & (A\wedge\neg B)\wedge(\neg\neg B\wedge\neg C) & \div \\
1 & \neg B\wedge\neg\neg B & \\
 & \neg B & \\
 & B & (1) \\
\multicolumn{3}{l}{\neg\neg((A\to B)\vee(B\to C))} \\
\multicolumn{3}{l}{(A\to B)\vee(B\to C)}
\end{array}$$

2. A, B en C zijn willekeurige formules uit de propositielogica, $P(x)$ en $Q(x)$ zijn willekeurige formules met vrije variabele x. Toon van onderstaande beweringen de juistheid of de onjuistheid aan.
$\underline{a}$. Als $A,B\models C$ dan $\vdash(A\wedge B)\to C$,
$\underline{b}$. Als $\models(A\vee B)$ dan $\models A\wedge\neg B$ of $\models\neg A\wedge B$,
$\underline{c}$. Als $\models\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ dan $\models\forall xP(x)$ en $\models\exists xQ(x)$,
$\underline{d}$. $\models\exists x(P(x)\vee Q(x))$ dan en slechts dan als $\models\exists xP(x)$ en $\models\exists xQ(x)$.

$\underline{a}$. Volgens de volledigheidsstelling geldt: $A,B\models C$ d.e.s.d. als $A,B\vdash C$. Dus als $A,B\models C$ dan $A,B\vdash C$ (1). Uit de deductiestelling volgt nu: als $A,B\vdash C$ dan $A\vdash B\to C$ (2). Nogmaals toepassen van de deductiestelling levert: als $A\vdash B\to C$ dan $\vdash A\to(B\to C)$ (3). Als $A\to(B\to C)$ afleidbaar is, dan is ook $(A\wedge B)\to C$ afleidbaar; zie nevenstaande afleiding. Dus als $\vdash A\to(B\to C)$ dan $\vdash(A\wedge B)\to C$ (4). Uit (1) t/m (4) volgt nu a de bewering is dus juist.

$$\begin{array}{l|l|ll}
1 & \multicolumn{3}{l}{A\to(B\to C)} \\ \hline
2 & & A\wedge B & \\ \cline{3-4}
 & & A & \\
3 & & B\to C & (1) \\
 & & B & (2) \\
 & & C & (3) \\
 & \multicolumn{3}{l}{(A\wedge B)\to C}
\end{array}$$

$\underline{a}$. (Andere oplossing) Beschouw de waarheidstabellen voor $P_1,\ldots,P_n$ (d.w.z. (in A, B of C voorkomende propositievariabelen), A, B, C, $A\wedge B$ en $(A\wedge B)\to C$ $A,B\models C$ betekent dat op elke regel, waarop A en B een 1 hebben, oo C een 1 heeft. Op geen enkele regel hebben dus $A\wedge B$ een 1, en C een (Dit betekent dat $(A\wedge B)\to C$ op geen enkele regel een 0 heeft; m.a.v $\models(A\wedge B)\to C$. Volgens de volledigheidsstelling geldt dan $\vdash(A\wedge B)\to C$ zodat de bewering juist is.
$\underline{b}$. Beschouw het volgende tegenvoorbeeld: neem voor zowel A als B dezelf.

algemeen geldige bewering b.v. $1 \leq 2$. Dan geldt $\models (A \vee B)$ maar zowel $\models A \wedge \neg B$ als $\models \neg A \wedge B$ geldt niet. Dus is bewering b onjuist.

c. $\models \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ betekent dat voor alle interpretaties van de in P en Q voorkomende individu- en predikaatsymbolen geldt, dat voor alle x, x zowel eigenschap P als eigenschap Q bezit. Maar dan geldt voor alle interpretaties van de in P en Q voorkomende individu- en predikaatsymbolen, dat (1) voor alle x, x eigenschap P heeft, (2) voor alle x, x eigenschap Q heeft, en dus ook (3) dat er een x bestaat, die eigenschap Q bezit. Met andere woorden: er geldt $\models \forall x P(x)$ èn $\models \exists x\, Q(x)$. De bewering is dus juist.

d. Beschouw het volgende tegenvoorbeeld: $Q(x)$ is gelijk aan $\neg P(x)$ voor een of andere P zodanig dat $P(x)$ waar is voor alle x in het domein. Neem b.v. $P(x) = \forall y[y+x \geq y]$ en $Q(x) = \exists y[y+x < y]$ (Ook eenvoudiger, voor alle x ware predikaten zoals $x = x$ zijn goed als P) met de natuurlijke getallen als domein. Nu gelden $\models \exists x(P(x) \vee Q(x))$ en $\models \exists x P(x)$, maar $\exists x\, Q(x)$ is onjuist. De bewering als zodanig is dus ook onjuist.

// Veel voorkomende fouten: (1) verschil niet weten tussen/verwarren van $\vdash$ en $\models$; (2) ontbreken van een beroep op de deductie- en/of volledigheidsstelling (a); (3) het beschouwen van regels in de waarheidstabellen waarin A en/of B een nul hebben (a tweede oplossing); (4) ontbreken van konkrete tegenvoorbeelden in b en d; (5) het gebruik van $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$ in plaats van respektievelijk "als ... dan ..." en "... d.e.s.d. als ..." ($\rightarrow$, $\leftrightarrow$ dienen om formules te construeren; in de beweringen a, b, c en d worden "als ... dan ..." en "... d.e.s.d. als ..." gebruikt om beweringen over willekeurige formules weer te geven). //.

3. Toon aan dat onderstaande redenering juist is (in het systeem van Fitch).
"Als het blijft stormen dan zal het waterpeil van de Schelde stijgen. Als het blijft stormen en het waterpeil van de Schelde stijgt, dan wordt de brug beschadigd. Als de brug beschadigd wordt, dan is de verkeerscapaciteit van de rijksweg te klein. Of de capaciteit van de rijksweg is voldoende of Rijkswaterstaat heeft een fout gemaakt, maar niet beide. Dus Rijkswaterstaat heeft een fout gemaakt."

Vertaling van de redenering in proposities:

S: het stormt
W: waterpeil van de Schelde stijgt
B: brug beschadigd
V: verkeerscapaciteit is voldoende
R: Rijkswaterstaat heeft een fout gemaakt

P_1 (1^e zin): S
P_2 (1^e zin): $S \to W$
P_3 (2^e zin): $(S \wedge W) \to B$
P_4 (3^e zin): $B \to \neg V$
P_5 (4^e zin): $(V \vee R) \wedge \neg (V \wedge R)$
C (5^e zin): R

Afleiding:

1 | S
2 | $S \to W$
3 | $(S \wedge W) \to B$
4 | $B \to \neg V$
5 | $(V \vee R) \wedge \neg(V \wedge R)$

| $(1+2)$
6 | W
| $(1+6+3)$
7 | B
| $(7+4)$
8 | $\neg V$
| $V \vee R$ (5)
| | V — | R
| | $\neg V$ (8) — | R
| | $X = R$
| R

Dus $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5) \to C$;
de redenering is dus juist.

// Veel voorkomende fouten: P_1 ontbreekt; er wordt een foute "afleiding van $(P_2 \wedge \ldots \wedge P_5) \to C$ gegeven (Er geldt nl. $\nvdash (P_2 \wedge \ldots \wedge P_5) \to C$) zie ook onder opgave 1. Wel goedgerekend werden: $(V \wedge \neg R) \vee (\neg V \wedge R$ of $V + R$ (exclusive or) in plaats van P_4; P_1 ontbreekt, maar er wo[rdt] een correct bewijs van $(P_2 \wedge \ldots \wedge P_5) \to (P_1 \to C)$ gegeven.

4. A, $\forall x\, B(x)$ en C zijn formules zonder vrije variabelen waarin de naam p niet voorkomt.
   a. Bewijs dat uit $A \vdash \neg \forall x\, B(x)$ en $A, \neg B(p) \vdash C$ volgt $A \vdash C$
   b. Toon aan dat het onder a. gestelde niet juist is als de naam p voorkomt in de formule A.

a. Met behulp van de gegevens (α): $A \vdash \neg \forall x\, B(x)$, ($\beta$): $A, \neg B(p) \vdash C$, en het feit dat p een naam is, die niet in de formule A voorkomt, kan men nevenstaande afleiding construeren. Er geldt dus $A \vdash C$.

b. Als de naam p voorkomt in de formule A, dan mogen we de laatste stap in de afleiding

1 | A
---
2 | $\neg \forall x\, B(x)$ $(1+\alpha$
3 | | $\neg \exists x \neg B(x)$
| | | $\neg B(a)$
| | | $\exists x \neg B(x)$
| | | $\neg \exists x \neg B(x)$
| | $\neg\neg B(a)$
| | $B(a)$
| | $\forall x\, B(x)$
| | $\neg \forall x\, B(x)$ (
| $\neg\neg \exists x \neg B(x)$
| $\exists x \neg B(x)$
| p | $\neg B(p)$
| | C $(1+4+$
| C

niet maken. Beschouw nl. het volgende tegenvoorbeeld: A is $\forall x[x \geq 3]$ met $p=3$, $B(x)$ is $x \neq 4$, en C is $\forall x[x \geq 4]$. Dan geldt

$\forall x[x \geq 3] \vdash \neg\forall x[x \neq 4]$,

$\forall x[x \geq 3], \neg(3 \neq 4) \vdash \forall x[x \geq 4]$, en

$\forall x[x \geq 3] \nvdash \forall x[x \geq 4]$.

// Veelvoorkomende fouten: (1) "afleidingen" van het nevenstaande type ($\vdash$ zegt iets over afleidbaarheid, b.v. in het systeem van Fitch, maar $\vdash$ kan zelf nooit in een afleiding volgens Fitch voorkomen!); (2) ontbreken van een concreet tegenvoorbeeld in b.; zie ook onder opgave 1. //.

$$
\begin{array}{|l}
A \vdash \neg\forall x\, B(x) \\
A, \neg B(p) \vdash C \\
\hline
\vdots \\
A \vdash C
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|l}
A \rightarrow \neg\forall x\, B(x) \\
(A \wedge \neg B(p)) \rightarrow C \\
\hline
\vdots \\
A \rightarrow C
\end{array}
$$

5. Gegeven zijn de formules P_1, P_2 en C. P_1: $\forall x \forall y (R(x) \wedge R(y) . \rightarrow . x = y)$, P_2: $\neg\forall x \neg R(x)$, C: $\exists x\, (R(x) \wedge \forall y (\neg R(y) . \vee . x = y))$. Bewijs dat de formule $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow C$ afleidbaar is in het systeem van Fitch.

$$
\begin{array}{lll}
1 & \forall x \forall y (R(x) \wedge R(y) . \rightarrow . x = y) & P\,1 \\
2 & \neg\forall x \neg R(x) & P\,2 \\
\hline
 & \quad (2) \text{ - - - - - - } ⑧ & \\
3 & \exists x\, \neg\neg R(x) & \\
 & \quad a \;|\; \neg\neg R a \quad (3) & \\
4 & \quad\;\; | \; R(a) & \\
 & \quad\;\; | \; \forall y (R(a) \wedge R(y) . \rightarrow . a = y) & \\
5 & \quad\;\; | \; R(a) \wedge R(b) . \rightarrow . a = b & \\
6 & \quad\;\; | \quad | \; R(b) & \\
7 & \quad\;\; | \quad | \; R(a) \wedge R(b) \quad (4+6) & \\
 & \quad\;\; | \quad | \; a = b \quad (5+7) & \\
 & \quad\;\; | \; R(b) \rightarrow a = b \text{ - - - - - - } ⑨ & \\
8 & \quad\;\; | \; \neg R(b) \vee (a = b) & \\
 & \quad\;\; | \; \forall y (\neg R(y) \vee (a = y)) & \\
 & \quad\;\; | \; R(a) \wedge \forall y (\neg R(y) \vee (a = y)) \quad (4+8) & \\
 & \quad\;\; | \; \exists x\, (R(x) \wedge \forall y (\neg R(y) . \vee . x = y)) & \\
 & \exists x\, (R(x) \wedge \forall y (\neg R(y) . \vee . x = y)) & C
\end{array}
$$

⑧

$$
\begin{array}{ll}
1 & \neg\forall x \neg R(x) \\
\hline
2 & \quad | \; \neg\exists x \neg\neg R(x) \\
 & \quad | \quad | \; \neg\neg R(a) \\
 & \quad | \quad | \; \exists x \neg\neg R(x) \\
 & \quad | \quad | \; \neg\exists x \neg\neg R(x) \quad (2) \\
 & \quad | \; \neg\neg\neg R(a) \\
 & \quad | \; \neg R(a) \\
 & \quad | \; \forall x \neg R(x) \\
 & \quad | \; \neg\forall x \neg R(x) \quad (1) \\
 & \neg\neg\exists x \neg\neg R(x) \\
 & \exists x \neg\neg R(x)
\end{array}
$$

⑨ zie volgende pagina

Dus $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow C$ is afleidbaar in het systeem van Fitch.

// Veelvoorkomende fouten: ontbreken van de deelbewijzen ⑧ en ⑨; zie verder onder opgave 1. //.

⑨

$$
\begin{array}{l|l}
1 & R(b) \rightarrow a=b \\
2 & \quad \neg(\neg R(b) .\vee.\ a=b) \\
 & \quad\quad R(b) \\
 & \quad\quad a=b \quad (1) \\
 & \quad\quad \neg R(b) .\vee.\ a=b \\
 & \quad\quad \neg(\neg R(b) .\vee.\ a=b) \quad (\\
 & \quad \neg R(b) \\
 & \quad \neg R(b) .\vee.\ a=b \\
 & \quad \neg(\neg R(b) .\vee.\ a=b) \\
 & \neg\neg(\neg R(b) .\vee.\ a=b) \\
 & \neg R(b) .\vee.\ a=b
\end{array}
$$

6. Zij gegeven de volgende redenering: "Alle Nederlanders zijn mensen. Alle mensen zijn feilbaar. Van Agt is een Nederlander. Dus niet alle Nederlanders zijn onfeilbaar".

a. Toon door middel van de boommethode aan dat de redenering juist is.

b. Transformeer de onder a. verkregen boom in een redenering in het systeem van Fitch.

a. Vertaling in de predikatenlogica: $N(x)$ is "x is Nederlander", $M(x)$ is "x is mens", $F(x)$ is "x is feilbaar", a is Van A

1e zin: $\forall x\,(N(x) \rightarrow M(x))$ A1

2e zin: $\forall x\,(M(x) \rightarrow F(x))$ A2

3e zin $N(a)$ A3

4e zin $\neg\forall x\,(N(x) \rightarrow \neg F(x))$ C

Boommethode:

1. $\forall x\,(N(x) \rightarrow M(x))$ (A1)
2. $\forall x\,(M(x) \rightarrow F(x))$ (A2)
3. $N(a)$ (A3)
4. $\forall x\,(N(x) \rightarrow \neg F(x))$ (¬C)
5. $N(a) \rightarrow M(a)$ (1)

5

6. $\neg N(a)$ — $\cancel{\ }$ 3 | 7. $M(a)$

8. $M(a) \rightarrow F(a)$ (2)

8

9. $\neg M(a)$ — $\cancel{\ }$ 7 | 10. $F(a)$

11. $N(a) \rightarrow \neg F(a)$ (4)

11

12. $\neg N(a)$ — $\cancel{\ }$ 5 | 13. $\neg F(a)$ — $\cancel{\ }$ 10

Alle takken van de boom sluiten; de redenering is dus juist.
De uit deze boom door transformatie verkregen redenering in het systee van Fitch bevindt zich op de volgende pagina.

⑩ als ⑨ met $N(a)$ i.p.v. $R(b)$ en met $M(a)$ i.p.v. $a=b$,

⑪ als ⑨ met $M(a)$ i.p.v. $R(b)$ en met $F(a)$ i.p.v. $a=b$,

⑫ als ⑨ met $N(a)$ i.p.v. $R(b)$ en met $\neg F(a)$ i.p.v. $a=b$.

1 $\forall x\,(N(x) \rightarrow M(x))$
2 $\forall x\,(M(x) \rightarrow F(x))$
3 $N(a)$

4 $\forall x\,(N(x) \rightarrow \neg F(x))$

(1)
$N(a) \rightarrow M(a)$ ⑩
$\neg N(a) \vee M(a)$

$\neg N(a)$
(3)
X

5 $M(a)$
(2)
$M(a) \rightarrow F(a)$ ⑪
$\neg M(a) \vee F(a)$

$\neg M(a)$
(5)
X

6 $F(a)$
(4)
$N(a) \rightarrow \neg F(a)$ ⑫
$\neg N(a) \vee \neg F(a)$

$\neg N(a)$
(3)
X

$\neg F(a)$
(6)
X

X

X

$X = \neg\forall x\,(N(x) \rightarrow \neg F(x))$
$\forall x\,(N(x) \rightarrow \neg F(x))$ (4)

$\neg\forall x\,(N(x) \rightarrow \neg F(x))$

// Veelvoorkomende fouten: (1) "vertaling" in de propositie- i.p.v. in de predikatenlogica; (2) $\exists x\, N(x)$ i.p.v. A3; (3) indicatie van de non-Fitch-stappen ⑩, ⑪ en ⑫ ontbreekt; (4) redenering (volgens Fitch) correspondeert niet met de struktuur van de boom; zie verder opgave 1. //

7. Bewijs de juistheid van onderstaande redenering in het systeem van Fitch.
"People are prejudiced against anyone who is liked by someone they dislike. But nobody is prejudiced against himself. So people don't like anyone who dislikes them".

Vertaling in de predikatenlogica:
$P(x,y)$ is "x is prejudiced against y",
$L(x,y)$ is "x likes y"; dus $\neg L(x,y)$ is "x dislikes y".

1 $\forall x \forall y \exists z (L(z,y) \wedge \neg L(x,z) . \rightarrow . P(x,y))$ — P_1 (1e zin)

2 $\neg \exists x\, P(x,x)$ — P_2 (2e zin)

3 $\quad \neg L(b,a)$

4 $\quad\quad L(a,b)$

$\quad\quad \forall x \forall y \exists z (L(z,y) \wedge \neg L(x,z) . \rightarrow . P(x,y))$ — (1)

$\quad\quad \forall y \exists z (L(z,y) \wedge \neg L(b,z) . \rightarrow . P(b,y))$

5 $\quad\quad \exists z (L(z,b) \wedge \neg L(b,z) . \rightarrow . P(b,b))$

$\quad\quad L(a,b) \wedge \neg L(b,a)$ — (3+4)

6 $\quad\quad \exists z (L(z,b) \wedge \neg L(b,z))$

$\quad\quad P(b,b)$ — (5+6+ modus ponens

$\quad\quad \exists x\, P(x,x)$

$\quad\quad \neg \exists x\, P(x,x)$ — (2)

$\quad \neg L(a,b)$

$\neg L(b,a) \rightarrow \neg L(a,b)$

$\forall y (\neg L(y,a) \rightarrow \neg L(a,y))$

$\forall x \forall y (\neg L(y,x) \rightarrow \neg L(x,y))$ — C (3e zin)

Dus $(P_1 \wedge P_2) \rightarrow C$ is afleidbaar in het systeem van Fitch; de redenering is dus correkt.

// Veelvoorkomende fouten: (1) "vertaling" in de propositie- i.p.v. de predikatenlogica; (2) 1e zin vertaald met: $\forall x \forall y \forall z \ldots$; N.B "any one" $\forall \ldots$, terwijl "someone" is $\exists \ldots$; zie verder opgave 1.

Algemene opmerking:

Naast de bovengenoemde oplossingen, zijn er vaak ook andere bewijzen, afleidingen of tegenvoorbeelden mogelijk. Deze werden natuurlijk goedgerekend, indien ze inderdaad correkt waren.

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
Onderafdeling der Wiskunde & Informatica
Vakgroep Informatica
Julianalaan 132
2628 BL DELFT

TENTAMEN INLEIDING MATHEMATISCHE LOGICA (a 127 C)

vrijdag 17 juni 1983, Mijnbouwplein
14.00 - 17.00 uur.

1. Bewijs onderstaande formules met behulp van het systeem van Fitch (A en B zijn willekeurige formules uit de predikatenlogica).

   N.B.: In de afleidingen mag alleen gebruik gemaakt worden van de in dit systeem toegestane afleidingsstappen.

   a) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$.

   b) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

   c) $A \vee (A \rightarrow B)$.

   d) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$.

2. De Shefferstreep | is gedefinieerd door: A|B is waar dan en slechts dan als A en B niet beide waar zijn. Bepaal een welgevormde formule F uit de propositielogica, waarin uitsluitend de Shefferstreep en de propositievariabelen P en Q (en eventueel haakjes) voorkomen en die bovendien voldoet aan bijgaande waarheidstabel.

P	Q	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Toon door middel van het systeem van Fitch de juistheid van onderstaande redenering aan:

   Als er 80 wagens beschikbaar zijn dan kan het vervoer naar Amsterdam doorgaan. Er moeten 10 extra personeelsleden beschikbaar zijn of het vervoer naar Amsterdam gaat niet door. Of er zijn geen 80 wagens beschikbaar, òf er zijn geen 10 extra personeelsleden beschikbaar, maar niet beide. Conclusie: er zijn geen 80 wagens beschikbaar.

4. P(x) en Q(x) zijn formules uit de predikatenlogica, waarin x als enige vrije variabele voorkomt. A, B en C zijn formules uit de propositielogica. Ga na of de volgende metabeweringen juist of onjuist zijn; geef steeds een bewijs of, respectievelijk, een tegenvoorbeeld.

a) Als $A \models B$ en $B \models C$ dan $\vdash ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$.

b) Als $\vdash \forall x[P(x) \wedge Q(x)]$ dan $\vdash \forall x P(x)$ en $\vdash \forall x Q(x)$.

c) Als $\models A$ onjuist, dan $\models \neg A$.

5. Sommige Amerikanen zijn beroemd. Alle beroemde mensen zijn bekend. Dus sommige Amerikanen zijn bekend.

a) Toon door middel van de boommethode aan, dat deze redenering juist is.

b) Transformeer de onder a) verkregen boom in een redenering in het systeem van Fitch.

6. Gegeven zijn de volgende formules:

F_1: $\forall x[Q(x) \rightarrow P(x)] \vee \forall x[R(x) \rightarrow \neg H(x)]$.

F_2: $\exists x[R(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \exists x[Q(x) \wedge (P(x) \vee \neg H(x))]$.

Bewijs dat de formule $F_1 \rightarrow F_2$ afleidbaar is in het systeem van Fitch.

7. Geef van elk der onderstaande formules een afleiding in het systeem van Fitch of toon aan dat de betreffende formule niet afleidbaar is.

a) $\forall x \exists y\, P(x,y) \rightarrow \exists y \forall x\, P(x,y)$.

b) $\exists x \neg R(x) \rightarrow \neg \forall x\, R(x)$.

c) $\exists x[A(x) \rightarrow B(x)] \leftrightarrow [\forall x\, A(x) \rightarrow \exists x\, B(x)]$.

8. $A(x)$ en $B(x)$ zijn formules uit de predikatenlogica (met x als enige vrije variabele) waarin de naam a niet voorkomt. Bewijs dat

uit $\forall x \neg A(x) \vdash \exists x\, B(x)$

en $B(a) \vdash C$

volgt $\neg \exists x\, A(x) \vdash C$.

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
Onderafdeling der Wiskunde
en Informatica
Júlianalaan 132
2628 BL DELFT

INLEIDING MATHEMATISCHE LOGICA (a127C)

Woensdag 17 augustus 1983

14.00 - 17.00 uur, Zaal MM

In bewijzen met behulp van het systeem van Fitch mag alleen gebruik gemaakt worden van afleidingsstappen die in dit systeem zijn toegelaten. Grotere stappen moeten (tenzij anders vermeld) apart bewezen worden.

1. Bewijs onderstaande formules in het systeem van Fitch (A, B en C zijn willekeurige formules uit de propositielogica).

   a. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.
   b. $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$.
   c. $(F1 \wedge F2) \to F3$ met
      F1: $(A \to \neg B) \wedge (B \to \neg C)$,
      F2: $D \to B$,
      F3: $D \to (\neg A \wedge \neg C)$.

2. Ga na of de volgende formules afleidbaar zijn in het systeem van Fitch. Geef steeds een bewijs in het systeem van Fitch of, als dit niet mogelijk is, een tegenvoorbeeld.

   a. $\forall x[F(x) \vee G(a)] \leftrightarrow [\forall xF(x) \vee G(a)]$.
   b. $\exists x[R(x,x) \to \exists z\exists yR(z,y)]$.
   c. $\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \to [\forall xP(x) \wedge \exists xQ(x)]$.
   d. $\exists x\forall yP(x,y) \to \forall y\exists xP(x,y)$.

3. Bewijs:

$$\forall x[S(x) \to H(x)],\quad \forall x[H(x) \to M(x)],\quad T(a) \quad \vdash \forall x[S(x) \to M(x)] \wedge T(a).$$

4. S, $\neg\forall x A(x)$ en B zijn formules uit de predikatenlogica waarin de naam a niet voorkomt. Bewijs dat uit

$$S \models \neg\forall x Ax \qquad \text{en} \qquad S, \neg A(a) \models B$$

volgt

$$S \vdash B.$$

5. Gegeven is de volgende redenering. Iedereen heeft een vader. Iemands vader is zijn ouder. Dus iedereen heeft een ouder.

   a. Vertaal deze redenering in het logisch formalisme van de predikatenlogica.

   b. Bewijs door middel van de boommethode dat deze redenering juist is.

   c. "Vertaal deze boom" in een overeenkomstig bewijs in het systeem van Fitch.

6. Bewijs dat onderstaande formule afleidbaar is in het systeem van Fitch.

$$H1 \rightarrow H2$$

met:

$$H1: \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)],$$
$$H2: \forall x[\exists y(P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y))].$$

7. Vertaal onderstaande redenering in het formalisme van de predikatenlogica en toon met behulp hiervan aan, dat de gegeven redenering juist is.

   Alleen volwassenen en kinderen vergezeld van hun ouders zagen de show. Alle volwassenen, die tot het einde bleven, vonden de show mooi. Arie zag de show, maar hij vond hem niet mooi. Dus sommige volwassenen bleven niet tot het einde of Arie was vergezeld van zijn ouders.

Uitwerking opgaven Tentamen "Inleiding Mathematische Logica" (a 127 C) van 17 augustus 1983.

1.a.

> 1 $A \to B$
>
> > 2 $B \to C$
> >
> > > A
> > >
> > > (1)
> > >
> > > B
> > >
> > > (2)
> > >
> > > C
> >
> > $A \to C$
>
> $(B \to C) \to (A \to C)$

$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

1.b.

> 1 $A \to B$
>
> > 2 $\neg A \to B$
> >
> > $A \vee \neg A$ ①
> >
> > > A
> > >
> > > (1)
> > >
> > > B
> >
> > > $\neg A$
> > >
> > > (2)
> > >
> > > B
> >
> > B
>
> $(\neg A \to B) \to B$

$(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$

1.c.

> $(A \to \neg B) \wedge (B \to \neg C) \wedge (D \to B)$ d.i. $F_1 \wedge F_2$
>
> 1 $A \to \neg B$
>
> 2 $B \to \neg C$
>
> 3 $D \to B$
>
> > D
> >
> > (3)
> >
> > 4 B
> >
> > (2)
> >
> > $\neg C$
> >
> > > A
> > >
> > > (1)
> > >
> > > $\neg B$
> > >
> > > (4)
> >
> > $\neg A$
> >
> > $\neg A \wedge \neg C$
>
> $D \to (\neg A \wedge \neg C)$ d.i. F_3

$((A \to \neg B) \wedge (B \to \neg C) \wedge (D \to B)) \to (D \to (\neg A \wedge \neg C))$

d.i. $(F_1 \wedge F_2) \to F_3$

①

> 1 $\neg(A \vee \neg A)$
>
> > A
> >
> > $A \vee \neg A$
> >
> > (1)
>
> $\neg A$
>
> $A \vee \neg A$
>
> (1)

$\neg\neg(A \vee \neg A)$

$A \vee \neg A$

2. Alle formules in deze opgave zijn afleidbaar; voor elke formule geven we een bewijs:

2.a. 1

$\forall x\,[F(x) \vee G(a)]$

$G(a) \vee \neg G(a)$ ③

$G(a)$

$\forall x F(x) \vee G(a)$

$\neg G(a)$

(1)

$F(b) \vee G(a)$

$F(b)$

$F(b)$

$G(a)$

$\neg G(a)$ ②

$X = F(b)$

$F(b)$

$\forall x F(x)$

$\forall x F(x) \vee G(a)$

$\forall x F(x) \vee G(a)$

$\forall x\,[F(x) \vee G(a)] \rightarrow [\forall x F(x) \vee G(a)]$

② $G(a) \wedge \neg G($

$\neg X$

$G(a)$

$\neg G(a)$

$\neg\neg X$

X

$G(a) \wedge \neg G(a). \rightarrow.$

③ als ① met $G($ i.p.v. A

1

$\forall x F(x) \vee G(a)$

$G(a) \vee \neg G(a)$ ③

$G(a)$

$F(b) \vee G(a)$

$\forall x\,[F(x) \vee G(a)]$

2

$\neg G(a)$

(1)

$\forall x F(x)$

$\forall x F(x)$

$G(a)$

(2) ②

$X = \forall x F(x)$

$\forall x F(x)$

$F(b)$

$F(b) \vee G(a)$

$\forall x\,[F(x) \vee G(a)]$

$\forall x\,[F(x) \vee G(a)]$

$[\forall x F(x) \vee G(a)] \rightarrow \forall x\,[F(x) \vee G(a)]$

2b.

$R(a,a)$

$\exists y\, R(a,y)$

$\exists z \exists y\, R(z,y)$

$R(a,a) \rightarrow \exists z \exists y\, R(z,y)$

$\exists x\,[R(x,x) \rightarrow \exists z \exists y\, R(z,y)]$

2.c.

$\forall x\,[P(x) \wedge Q(x)]$

$P(a) \wedge Q(a)$

$P(a)$

$\forall x P(x)$

$Q(a)$

$\exists x\, Q(x)$

$\forall x P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$

$\forall x\,[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow [\forall x P(x) \wedge \exists x\, Q(x$

2.d.

$$
\begin{array}{l|l}
 & \exists x \forall y\, P(x,y) \\ \hline
 & \begin{array}{l|l} a & \forall y\, P(a,y) \\ \hline & P(a,b) \\ & \exists x\, P(x,b) \\ & \forall y \exists x\, P(x,y) \end{array} \\
 & \forall y \exists x\, P(x,y)
\end{array}
$$

$\exists x \forall y\, P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x\, P(x,y)$

3.

$$
\begin{array}{l|l}
 & \forall x[S(x) \rightarrow H(x)] \wedge \forall x[H(x) \rightarrow M(x)] \wedge T(a) \\ \hline
1 & \forall x[S(x) \rightarrow H(x)] \\
2 & \forall x[H(x) \rightarrow M(x)] \\
3 & T(a) \\
4 & S(b) \rightarrow H(b) \qquad (1) \\
5 & H(b) \rightarrow M(b) \qquad (2) \\
 & \qquad \begin{array}{|l} S(b) \\ \hline (4) \\ H(b) \\ (5) \\ M(b) \end{array} \\
 & S(b) \rightarrow M(b) \\
 & \forall x[S(x) \rightarrow M(x)] \\
 & T(a) \qquad (3) \\
 & \forall x[S(x) \rightarrow M(x)] \wedge T(a)
\end{array}
$$

$\forall x[S(x) \rightarrow H(x)] \wedge \forall x[H(x) \rightarrow M(x)] \wedge T(a) \,.\!\rightarrow\!.\, \forall x[S(x) \rightarrow M(x)] \wedge T(a)$

Toepassen van de "inverse" van de deductiestelling, d.i. de uitbreiding van Stelling 9.8 [in H.C.M. de Swart & H.G. Hubbeling: "Inleiding tot de symbolische logica"] tot de predikatenlogica, levert:

$\forall x[S(x) \rightarrow H(x)] \wedge \forall x[H(x) \rightarrow M(x)] \wedge T(a) \vdash \forall x[S(x) \rightarrow M(x)] \wedge T(a)$

hetgeen inhoudt dat

$\forall x[S(x) \rightarrow H(x)]\,,\ \forall x[H(x) \rightarrow M(x)]\,,\ T(a) \vdash \forall x[S(x) \rightarrow M(x)] \wedge T(a)$

4. Uit de volledigheidsstelling volgt

- als $S \models \neg \forall x\, A(x)$, dan $S \vdash \neg \forall x\, A(x)$, en
- als $S, \neg A(a) \models B$, dan $S, \neg A(a) \vdash B$; zodat $S \wedge \neg A(a) \vdash B$.

Toepassen van de deductiestelling (voor de predikatenlogica) levert nu

- als $S \vdash \neg \forall x\, A(x)$, dan $\vdash S \rightarrow \neg \forall x\, A(x)$ $\quad (\alpha)$, en
- als $S \wedge \neg A(a) \vdash B$, dan $\vdash (S \wedge \neg A(a)) \rightarrow B$ $\quad (\beta)$.

1 S

(α)

$\neg\forall x\, A(x)$ ---- ④

$\exists x\, \neg A(x)$

a $\neg A(a)$

(1)

$S \wedge \neg A(a)$

(β)

B

B

④ 1 $\neg\forall x\, A(x)$

2 $\neg\exists x\, \neg A(x)$

$\neg A(c)$

$\exists x\, \neg A(x)$

(2)

$\neg\neg A(c)$

$A(c)$

$\forall x\, A(x)$

(1)

$\neg\neg\exists x\, \neg A(x)$

$\exists x\, \neg A(x)$

Uit nevenstaande afleiding volgt, dat uit (α) en (β) $S \vdash B$ volgt. Samenvattend, geldt dus, dat uit $S \models \neg\forall x\, A(x)$ en $S, \neg A(a) \models B$ volgt dat $S \vdash B$.

[Voor een veelvoorkomende fout: zie volgende pagina].

5. a. P_1: $\forall x \exists y\, V(x,y)$ — y is de vader van x.

P_2: $\forall x \forall y [V(x,y) \rightarrow O(x,y)]$ — y is een ouder van x.

C: $\forall x \exists y\, O(x,y)$

b.

1 $\forall x \exists y\, V(x,y)$ — P1

2 $\forall x \forall y\, V(x,y) \rightarrow O(x,y)$ — P2

$\neg\forall x \exists y\, O(x,y)$ — $\neg C$

$\exists x\, \neg\exists y\, O(x,y)$ ---- ⑤

$\neg\exists y\, O(a,y)$ ---- ⑥

3 $\forall y\, \neg O(a,y)$

(1)

$\exists y\, V(a,y)$

4 $V(a,b)$

(2)

$V(a,b) \rightarrow O(a,b)$

$\neg V(a,b) \vee O(a,b)$ ---- ⑦

$\neg V(a,b)$ | $O(a,b)$
4 | (3)
$\times$ | $\neg O(a,b)$
 | $\times$

⑤ als ④ maar met $\neg\exists y\, O(x,y)$ i.p.v. $A(x)$

⑥ 1 $\neg\exists y\, O(a,y)$

$O(a,c)$

$\exists y\, O(a,$

(1)

$\neg O(a,c)$

$\forall y\, \neg O(a,y)$

⑦ 1 $V(a,b) \rightarrow O(a,b)$

$V(a,b) \vee \neg V(a,b)$

$V(a,b)$ | $\neg V(a,b$

(1) | $\neg V(a,b$

$O(a,b)$ | $\neg V(a,b) \vee$

$\neg V(a,b) \vee O(a,b)$

$\neg V(a,b) \vee O(a,b)$

⑧ als ① met $V(a,b)$ i.p.v. A.

5. 1 $\forall x \exists y\ V(x,y)$ — P_1

2 $\forall x \forall y [V(x,y) \rightarrow O(x,y)]$ — P_2

$\neg \forall x \exists y\ O(x,y)$ — $\neg C$

$\exists x \neg \exists y\ O(x,y)$ — (5)

a $\neg \exists y\ O(a,y)$ — (6)

3 $\forall y \neg O(a,y)$

(1)

$\exists y\ V(a,y)$

4 b $V(a,b)$

(2)

$V(a,b) \rightarrow O(a,b)$ — (7)

$\neg V(a,b) \vee O(a,b)$

$\neg V(a,b)$ | $O(a,b)$

(4) | (3)

X | $\neg O(a,b)$

| X

X

X

X

X = $\forall x \exists y\ O(x,y)$

4. (vervolg) foute afleiding:

1 $S \rightarrow \neg \forall x A(x)$

2 $S \wedge \neg A(a) \rightarrow B$

3 S

(1)

$\neg \forall x A(x)$ — (4)

$\exists x \neg A(x)$

4 a $\neg A(a)$

(3)

$S \wedge \neg A(a)$

(2)

B

B

Deze afleiding is incorrekt vanwege regel 4: de naam a is niet onbelast want hij komt al in de premissen (nl. 2) voor

6. 1 $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$ — d.i. H_1

$\exists y [P(y) \wedge R(b,y)]$

c $P(c) \wedge R(b,c)$

$P(c)$

$R(b,c)$

(1)

$P(c) \rightarrow Q(c)$

$Q(c)$

$Q(c) \wedge R(b,c)$

$\exists y [Q(y) \wedge R(b,y)]$

$\exists y [Q(y) \wedge R(b,y)]$

$\exists y (P(y) \wedge R(b,y)) \rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(b,y))$

$\forall x [\exists y (P(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(x,y))]$ — d.i. H_2

$H_1 \rightarrow H_2$

7. $S(x)$: x zag de show ; $V(x)$: x is volwassen ; $K(x)$: x is een kind ; $B(x)$: x vergezeld van zijn ouders ; $E(x)$: x zag de show tot het einde ; $M(x)$: x vond de show mooi ; a = Arie .

P_1 : $\forall x\, [S(x) \rightarrow (V(x) \vee (K(x) \wedge B(x)))]$

P_2 : $\forall x\, [(V(x) \wedge E(x)) \rightarrow M(x)]$

P_3 : $S(a) \wedge \neg M(a)$

C : $\exists x\, [V(x) \wedge \neg E(x)] \vee B(a)$

1 | $\forall x\, [S(x) \rightarrow (V(x) \vee (K(x) \wedge B(x)))]$
2 | $\forall x\, [(V(x) \wedge E(x)) \rightarrow M(x)]$
3 | $S(a) \wedge \neg M(a)$
| (3)
4 | $S(a)$
| (1)
5 | $S(a) \rightarrow (V(a) \vee (K(a) \wedge B(a)))$
| (4+5)
| $V(a) \vee (K(a) \wedge B(a))$
| | $V(a)$
| | | $E(a)$
6 | | | $V(a) \wedge E(a)$
7 | | | $(V(a) \wedge E(a)) \rightarrow M(a)$
| | | (6+7)
| | | $M(a)$
| | | (3)
| | | $\neg M(a)$
| | $\neg E(a)$
| | $V(a) \wedge \neg E(a)$
| | $\exists x\, [V(x) \wedge \neg E(x)]$
| | $\exists x\, [V(x) \wedge \neg E(x)] \vee B(a)$

| | $K(a) \wedge B(a)$
| | $B(a)$
| | $\exists x\, [V(x) \wedge \neg E(x)] \vee B(a)$

| $\exists x\, [V(x) \wedge \neg E(x)] \vee B(a)$

$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \rightarrow C$

Verbeteringen.

blz.1, regel 22 van boven moet zijn: neringen van ongeldige redeneringen te onderscheiden
,, 25 ,, : "...)" wordt "bewerende volzin, propositie...)"
,, voorbeeld VI: ... zijn Engelsen.

blz.2, r.7 v.b.:Men ziet dat in deze voorbeelden elke ... en conclusie tenminste
20 ,, "niet of moeilijk" wordt "principieel niet"

blz.3, r.10 van onderen "Dat betekent ... anders:" wordt "Deze term "impliceren" reserveren we voor de metalogica, A impliceert B betekent daar:"
25 v.o. ... a+b, a × b, a-b ...

blz.4, r.24 v.b. ... of van de namen der (meestal ...
5 v.o. Toevoegen: Dezelfde bezwaren als tegen "implicatie" hebben we (Quine, Lorenzen, ..., ik) tegen de naam "equivalentie".
7 v.o. .. afkorting ..
14 v.o. (4) Eng.naam (Quine):

blz.5 Regelnummers toevoegen! Vak → ¬ 1 t/m 9, vak ∧ 10 t/m 16, vak ∨ 17 t/m 27
Aan r.1 toevoegen: $\frac{A}{A}$; in r.22 Ockham, laatste schema $\frac{A \wedge B}{\neg(\neg A \vee \neg B)}$

blz.6, r.18 v.o. en blz.5, eerste regel na grote rechthoek: blz.3 wordt blz.3"

blz.7, formule 9: (A → (B → C))
Na formule 5½: formules 7½ en 8½ zie blz.23, r.4 resp. 3 v.o.

blz.8 T1) r.3 begint: bridge out
T4) Aan laatste regel toevoegen: De conclusie kan "scherper"!

blz.9, r.1 v.b. Op blz.3 ...
30 v.b. = 30 v.o. .. afleidingen blz.10: I (A ∨ C) .. [Deze afl.staat op tweede blad verbeteringen.]
29 v.o. B,C; II A → .. [Afleiding staat blz.10 nr.3]
26 v.o. doet); III A → .. ,, 10 2]
25 v.o. omgekeerd; IV (A ∧ B) .. ,, 10 1]
30 v.o. ... ; we mogen
9 v.o. $\frac{A + B}{(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)}$ blz.10 r.1 v.b. $\left.\begin{matrix}\neg(A+B)\\ A \leftrightarrow B\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\neg(A \leftrightarrow B)\\ A + B\end{matrix}\right\}$

blz.10 Stukje historie: De boommethode werd in de zestiger jaren ontwikkeld door Smullyan en gebruikt in de leerboeken van Jeffrey en Leblanc-Wisdom. Hij is ontstaan als vereenvoudiging van de "tableaux" van Beth en de "model sets" van Hintikka.

blz.11 r.13 en 14v.b. Liever "klassen" i.p.v. "begrippen"
15 v.o. "zaten we ...zo; we" wordt "was de quantorenlogica (predicatenlogica) uiteindelijk terug te brengen op klassenalgebra. Dit is echter niet het geval. We"

blz.12 en volgende. Eenplaatsig, meerplaatsig e.d. i.p.v. eenledig, meerledig

blz.12, r.3 v.o. I Sommige a zijn b ...O...niet b $\exists x(\alpha x \wedge \neg \beta x)$
4 v.o. E Geen a is b $\forall x(\alpha x \rightarrow \neg \beta x)$

blz.13, r.1 v.b. "zijn gedaan" wordt "laten zich uitputtend behandelen"
3 v.b. dierestaart)
10 v.b. In de formule - - - vervangen door resp. ∧ → ∧
18 v.b. ..I volgt. III uit II kan niet.) ..
vert.oef. 4b) laatste regel: my hat).)
5) vijfde regel: → Ax)). Maar
r.1 v.o. .. op blz.24)

blz.14 oef.2) Schrap "daarna"
oef.6) regels 3 en 6: (∀y(wordt ∀y((

blz.15, r.26 v.b. Pas eens toe op: Ray is 0=y (in de verzameling der nietnegatieve reële getallen), of op: Ray is 0.y = 1-1 (in de verzameling der reële getallen); 0 is die a.

blz.16, tweede en derde regel na de rechthoek, schrappen: (twee ... nr.39)
r.4 v.o. "er is 'n ding zodanig" wordt "elk ding is zodanig"

blz.18, formules 41-42 .. ∀xPx)
Aan r.6 v.o. toevoegen: Geef een betere omschrijving. Bijbehorende zaaf:
$\neg\exists O \rightarrow \forall(O \rightarrow P)$, equivalent met $\forall x((Ox \wedge \neg\exists yOy) \rightarrow Px)$
Antwoord: blz.A.10.

blz.19, r.12 v.b. ... conclusie Pa.
3 v.o. "vier formules" wordt "drie deelformules"
17 v.o. $\exists xy(Px \wedge Py \wedge x \neq y)$
19 v.o. II $\exists x(\ldots\ y=x))$,

blz.20 r.2,6,7 v.b. 3 wordt 3"
formules 6 regel 4: gedaan m.b.v. quodlibet 7

blz.24 r.1 v.o. 26 wordt 27
Schilderij: $\exists x(Sx \wedge \forall y(\ldots$

blz.26 formule 33 regel 3: $\forall(\neg P \vee Q)$
formule 40 eerste anders, regel 3: $\underline{\forall P}$

blz.27 r.5 v.o. 3 wordt 3"

blz.29, r.1 v.o. wordt $\exists_P x \forall_P y(y = x)$.

,, Onderaan toevoegen: Het beste antwoord op de vraag van blz.16 onderaan is:
Elk element van de ('n) lege verzameling bezit elke eigenschap.

,, In de afleiding bij "Precies één" moeten de regels tussen nr.4(Pc) en nr.26 (Pa ↔ a=c) worden vervangen:

```
   |  | Pc
   |  | ---
   |  |  | Pa
   |  |  | ---
   |  |  | Pa ∧ Pc
   |  |  | 3
   |  |  | ∀z(Pa ∧ Pz → a=z)
   |  |  | Pa ∧ Pc → a=c
   |  |  | a=c
   |  | Pa → a=c
   |  | ∀y(Py → y=c)
   |  | Pc ∧ ∀y(Py → y=c)
   |  | ∃x(Px ∧ ∀y(Py → y=x))
II | ∃x(Px ∧ ∀y(Py → y=x))
   |  | Pc ∧ ∀y(Py → y=c)
   |  | -----------------
   |  | Pc
   |  | ∀y(Py → y=c)
   |  | Pa → a=c
   |  |  | a=c
   |  |  | ---
   |  |  | Pc
   |  |  | Pa
   |  | a=c → Pa
   |  | Pa ↔ a=c
```

Blz.7, voorbeeld I:

```
| (A ∨ C) → (A ∧ C)
| (¬A ∧ ¬C) → ¬B
| B ∨ ¬(A ↔ C)
| ------------
|  | B
|  | -
|  | 2
|  | ¬(¬A ∧ ¬C)
|  | A ∨ C
|  | 1
|  | A ∧ C
|  | A ∧ B ∧ C
|
|  | ¬(A ↔ C)
|  | --------
|  | A + C
|  | (A ∧ ¬C) ∨ (¬A ∧ C)
|  |  | A ∧ ¬C        | ¬A ∧ C
|  |  | ------        | ------
|  |  | A             | ¬A
|  |  | ¬C            | C
|  |  | A ∨ C         | A ∨ C
|  |  | 1             | 1
|  |  | A ∧ C         | A ∧ C
|  |  | C             | A
|  |  | A ∧ B ∧ C     | A ∧ B ∧ C    (quodlibet!)
|  | A ∧ B ∧ C
|
| A ∧ B ∧ C
```